الرياضيات

البحتة

القسم العلمي



الرياضيات
الصف الثاني الثانوي
الفصل الدراسي الأول

كتـــاب الطالـــب

الصف الثانى الثانوى　　الفصل الدراسى الأول

SAKKARA PUBLISHING

كتـــاب الطالـــب

الصف الثانى الثانوى　　الفصل الدراسى الأول

الرياضيات البحتة



- إن التنافس مع الذات هو أفضل تنافس.
- من وثق بالله أغناه ومن توكل عليه كفاه.
- من يعش فى خوف، فلن يكون حرًا أبدًا.
- امدح صديقك علنًا وعاتبه سرًا.
- اختر كلماتك قبل أن تتحدث.
- الشعوب وحدها هى القادرة على تحرير نفسها وتحقيق أحلامها.

الرياضيات البحتة

القسم العلمي



كتـــاب الطالـــب

الصف الثانى الثانوى

الفصل الدراسى الأول

SAKKARA
PUBLISHING

إعداد

أ/ كمال يونس كبشة

أ.د/ عفاف أبو الفتوح صالح

أ.م.د/ عصام وصفى روفائيل

أ/ مجدى عبد الفتاح الصفتى

أ/ أسامة جابر عبد الحافظ

جميع الحقوق محفوظة لا يجور نشر أى جزء من هذا الكتاب أو تصويره أو تخزينه أو تسجيله بأى وسيلة دون موافقة خطية من الناشر.

شركة سقارة للنشر

ش.م.م

SAKKARA PUBLISHING

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:

١ التأكيد على أن الغاية الأساسية من هذا الكتاب هى مساعدة المتعلم على حل المشكلات واتخاذ القرارات فى حياته اليومية, والتى تساعده على المشاركة فى المجتمع.

٢ التأكيد على مبدأ استمرارية التعلم مدى الحياة من خلال العمل على أن يكتسب الطلاب منهجية التفكير العلمى، وأن يمارسوا التعلم الممتزج بالمتعة والتشويق، وذلك بالاعتماد على تنمية مهارات حل المشكلات وتنمية مهارات الاستنتاج والتعليل، واستخدام أساليب التعلم الذاتى والتعلم النشط والتعلم التعاونى بروح الفريق، والمناقشة والحوار، وتقبل آراء الآخرين، والموضوعية فى إصدار الأحكام، بالإضافة إلى التعريف ببعض الأنشطة والإنجازات الوطنية.

٣ تقديم رؤى شاملة متماسكة للعلاقة بين العلم والتكنولوجيا والمجتمع(STS) تعكس دور التقدُّم العلمى فى تنمية المجتمع المحلى، بالإضافة إلى التركيز على ممارسة الطلاب التصرُّف الواعى الفعّال حِيال استخدام الأدوات التكنولوجية.

٤ تنمية اتجاهات إيجابية تجاه الرياضيات ودراستها وتقدير علمائها.

٥ تزويد الطلاب بثقافة شاملة لحسن استخدام الموارد البيئية المتاحة.

٦ الاعتماد على أساسيات المعرفة وتنمية طرائق التفكير، وتنمية المهارات العلمية، والبعد عن التفاصيل والحشو، والابتعاد عن التعليم التلقينى؛ لهذا فالاهتمام يوجه إلى إبراز المفاهيم والمبادئ العامة وأساليب البحث وحل المشكلات وطرائق التفكير الأساسية التى تميز مادة الرياضيات عن غيرها.

وفى ضوء ما سبق روعى فى هذا الكتاب ما يلى:

★ تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومترابطة لكل منها مقدمة توضح أهدافها ودروسها ومخطط تنظيمى لها والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التى تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية بينهم وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع.

★ كما قدم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهى كل درس ببند «تمارين» وتشمل مسائل متنوعة تتناول المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في الدرس.

★ تنتهى كل وحدة بملخص للوحدة يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة وتمارين عامة تشمل مسائل متنوعة على المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في هذه الوحدة.

★ ينتهي الكتاب بإختبارات عامة تشمل جميع المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في وحداته.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

المحتويات

الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

الدوال الحقيقية. ٤
بعض خواص الدوال. ١٠
تابع خواص الدوال. ١٧
تحويلات الرسوم البيانية. ٢١
المعادلات والمتباينات. ٣٨
ملخص الوحدة. ٤٦
تمارين عامة. ٤٩
اختبار تراكمي. ٥١

الوحدة الثانية

الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

الأسس الكسرية. ٥٤
الدالة الأسية. ٦١
حل المعادلات الأسية وتطبيقاتها. ٦٧
الدالة العكسية. ٧٠
الدالة اللوغارتمية وتمثيلها البياني. ٧٤
بعض خواص اللوغاريتمات. ٨٠
ملخص الوحدة. ٨٧
تمارين عامة. ٨٩
اختبار تراكمي. ٩١

المحتويات

النهايات والاتصال

الوحدة الثالثة

مقدمة في النهايات. ٩٤
إيجاد نهاية الدالة جبريا. ١٠٠
نهاية الدالة عند اللانهاية. ١٠٧
نهاية الدوال المثلثية. ١١٣
بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة. ١١٨
الاتصال. ١٢٣
ملخص الوحدة. ١٣٠
تمارين عامة. ١٣٢
اختبار تراكمي. ١٣٤

حساب المثلثات

الوحدة الرابعة

قانون (قاعدة) الجيب. ١٣٨
قانون (قاعدة) جيب التمام. ١٤٨
ملخص الوحدة. ١٥٧
تمارين عامة. ١٥٨
اختبار تراكمي. ١٦١
اختبارات عامة. ١٦٢
إجابات بعض التمارين. ١٧٦



الوحدة الأولى

الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

Functions of a real variable and drawing curves

مقدمة الوحدة

لقد استخدم المصريون القدماء معادلات من الدرجة الأولى، وقاموا بحلها بطرق مختلفة، كما عرفوا معادلات من الدرجة الثانية، وحلوا مسائل تتعلق بها، وأقدم ما عُرف في علم الجبر عند المصريين موجود في بردية الكاتب المصري (أحمس)، وهو يذكر أنه نقل هذه البردية عن أصل يرجع إلى نحو ١٨٥٠ق م، ويبدو أن المعلومات الرياضية الموجودة في هذه البردية تعود إلى أيام الفرعون زوسر أحد ملوك الأسرة الثالثة (نحو ٣٠٠٠ق م)، وصاحب هرم سقارة المدرج - أقدم الأبنية الحجرية في مصر - وفيها نجد ما يدل على أن المصريين القدماء قد عرفوا المتتابعات الحسابية والمتتابعات الهندسية وقد عرفوا أيضا معادلات من الدرجة الثانية.

وفي حوالي ٢٠٠٠ ق م وضع البابليون القدماء جداول للمربعات والمكعبات، وحلوا معادلات الدرجة الثانية والثالثة، وتطور بعد ذلك فى عهد الإغريق الحل الهندسي لمعادلات الدرجة الثانية في عصر فيثاغورس، وقد لمس الإسكندريون الحاجة إلى علم الجبر، فبحث (ديوفانتس) الذي عاش في الإسكندرية في القرن الثالث الميلادي (٢٥٠م) في حل معادلات الدرجة الثانية ذات المعاملات الموجبة.

أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مفهوم الدالة الحقيقية.
- يحدد مجال الدوال الحقيقية، والمجال المقابل والمدى لها.
- يتعرف بعض خواص الدوال الحقيقية.
- يتعرف الدالة الأحادية (one – to – one).
- يتعرف الدوال الزوجية والدوال الفردية ويفرق بينهما.
- يستنتج إطراد الدوال الحقيقية (تزايد الدوال – تناقص الدوال – ثبوت الدوال).
- يتعرف الدوال كثيرات الحدود.
- يرسم منحنيات الدوال (الدالة التربيعية – دالة المقياس – الدالة التكعيبية – الدالة الكسرية د(س) = $\frac{1}{س}$ ويستنتج خواص كل منها.
- يستنتج تأثير كل من التحويلات: د(س ± أ)، د(س) ± أ على الدوال السابقة.
- يستنتج تأثير د(اس)، اد(س) على الدوال السابقة.
- يطبق التحويلات السابقة على رسم منحنيات الدوال الحقيقية.
- يحل معادلات على الصورة: |أ س + ب| = جـ، |أ س + ب| = |ء س + جـ|، |أ س + ب| = جـ س + ء
- يحل متباينات على الصورة: |أ س + ب| > جـ ، |أ س + ب| < جـ ، |أ س + ب| ≥ جـ ، |أ س + ب| ≤ جـ
- يستخدم الدوال الحقيقية فى حل مشكلات رياضية وحياتية فى مجالات مختلفة.
- يربط بين ما درسه من تأثير التحويلات السابقة على الدوال المثلثية فى صورة أنشطة.
- يبحث عن التمثيل البيانى للدوال الحقيقية السابق دراستها، وتأثير التحويلات السابقة باستخدام برنامج الجيوجيبرا "geogebra"



المصطلحات الأساسية

Function	دالة	Cubic function	دالة تكعيبية
one–to–one function	دالة أحادية	polynomial function	دالة كثيرة الحدود
Increasing function	دالة تزايدية	Rational function	دالة كسرية
Modulus function	دالة مقياس	Range	مدى
Even function	دالة زوجية	Transformation	تحويل هندسى
Decreasing function	دالة تناقصية	Domain	مجال
Quadratic function	دالة تربيعية	Co–domain	مجال مقابل
Odd function	دالة فردية	Monotony of a function	إطراد دالة
Constant function	دالة ثابتة		

دروس الوحدة

الدرس (١ - ١): الدالة الحقيقية.

الدرس (١ - ٢): بعض خواص الدوال.

الدرس (١ - ٣): تابع خواص الدوال.

الدرس (١ - ٤): تحويلات الرسوم البيانية.

الدرس (١ - ٥): المعادلات والمتباينات.

مخطط تنظيمى للوحدة



الأدوات والوسائل

آلة حاسبة رسومية - حاسب آلى مزود ببرامج رسومية (Graph, GeoGebra)

الدرس ١

الدوال الحقيقية
Real Function

سوف تتعلم
- مفهوم الدالة الحقيقية.
- اختبار الخط الرأسى.
- الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة.

المصطلحات الأساسية

دالة	*Function*
مجال	*Domain*
مجال مقابل	*Co-domain*
مدى	*range*
مخطط سهمى	*arrow diagram*
مخطط بياني	*Cartesian diagram*
خط رأسى	*vertical line*

الأدوات المستخدمة
- آله حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

تذكر أن

مدى الدالة مجموعة العناصر (الصور) فى المجال المقابل التى يكون لها أصل فى المجال.

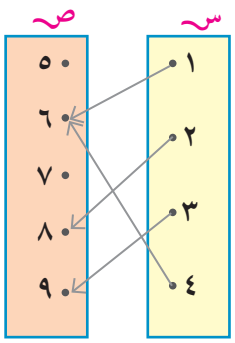
مدى الدالة مجموعة جزئية من المجال المقابل

استكشف

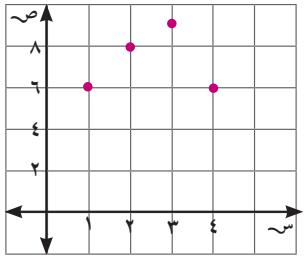
سبق أن درست مفهوم الدالة، وعلمت بأنها علاقة بين مجموعتين غير خاليتين س، ص بحيث يكون لكل عنصر من عناصر س صورة واحدة فقط من عناصر ص، **وتكتب الدالة د من المجموعة س إلى المجموعة ص** كالآتى: د: س ⟵ ص

وتقرأ دالة من س إلى ص ويستخدم الرمز د(س) للتعبير عن الدالة وتمثل د(س) قيمة ص التى ترتبط بقيمة س وتكتب ص = د(س)

مثال



العلاقة من المجموعة س إلى المجموعة ص الممثلة فى المخطط السهمى المجاور تمثل دالة، حيث المجموعة س هى مجال الدالة = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} والمجموعة ص المجال المقابل للدالة = {٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩} أما مجموعة العناصر {٦ ، ٨ ، ٩} فتعرف بمدى الدالة كما يمكن تمثيل العلاقة السابقة بالمخطط البيانى كما فى الشكل التالى:

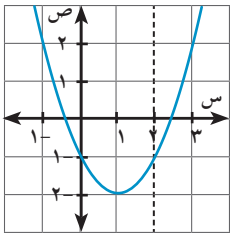


حيث نلاحظ أن كل خط رأسى فى الشبكة البيانية يمر بنقطة واحدة فقط من النقط التى تمثل عناصر الدالة.

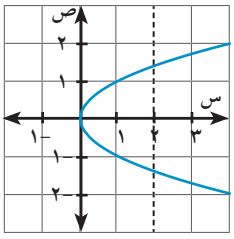
تعلم

اختبار الخط الرأسى

إذا وجد أن الخط الرأسى عند كل عنصر من عناصر المجال يمر بنقطة واحدة فقط من النقط التى تمثل العلاقة كانت العلاقة دالة.



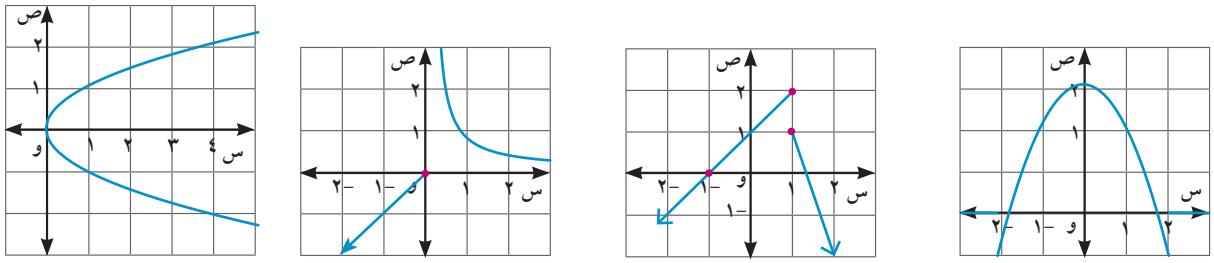
دالة



ليست دالة

مثال **تحديد العلاقات التى تمثل دالة** Identify the relations representing the function

(١) فى كل شكل من الأشكال الآتية بيِّن ما إذا كانت ص تمثل دالة فى س أم لا.



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤)

الحل

شكل (١) يمثل دالة

شكل (٢) لا يمثل دالة؛ لأن الخط الرأسى المار بالنقطة (١، ٠) يقطع الشكل البيانى فى نقطتين.

شكل (٣) يمثل دالة.

شكل (٤) لا يمثل دالة؛ لأن يوجد خط رأس يقطع المنحنى في أكثر من نقطة.

حاول أن تحل

(١) فى كل علاقة مما يأتى حدد ما إذا كانت ص تمثل دالة فى س أم لا.

أ تمثل س رقم جلوس الطالب، ص مجموع درجاته فى امتحان الفصل الدراسى الأول.

ب تمثل مجموعة الأزواج المرتبة {(٢، ٣)، (٣، ٤)، (-٢، ١)، (٣، ٥)} بيان لعلاقة ما.

مثال **تعيين مجال الدالة جبريًّا** Identifying the domain of the function algebraically

(٢) عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

أ $د_١(س) = \frac{س + ٣}{س^٢ - ٩}$ ب $د_٢(س) = \sqrt{س - ٣}$ ج $د_٣(س) = \frac{١}{\sqrt{٨ - س^٢}}$

الحل

أ الدالة $د_١$ تكون غير معرفة عندما يكون المقام = ٠ لذلك نضع $س^٢ - ٩ = ٠$ أى $س = \pm ٣$

وعليه يكون مجال الدالة هو ع - {-٣، ٣}.

ب تكون $د_٢$ (س) معرفة عندما يكون $س - ٣ \geq ٠$ أى أن $س \geq ٣$



أى أن مجال $د_٢$ هو [٣، ∞[.

ج تكون $د_٣$ معرفة عندما يكون $س^٢ - ٤ > ٠$



وعليه فإن مجال $د_٣$ (س) هو]-∞، -٢[∪]٢، ∞[أو ع - [-٢، ٢]

حاول أن تحل

(٢) عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:-

أ $د_{١}(س) = \frac{٢س + ٣}{س^{٢} - ٣س + ٢}$

ب $د_{٢}(س) = \sqrt{٨س^{٢} - ١٦}$

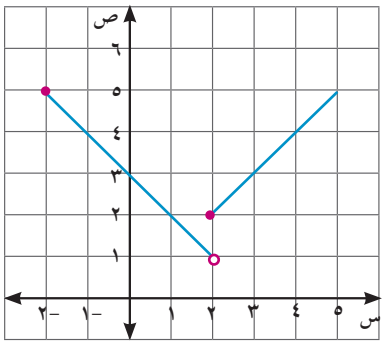
مثال

الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة *Function defined by more than one rule*

(٣) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} ٣ - س & \text{عندما } -٢ \leqslant س < ٢ \\ س & \text{عندما } ٢ \leqslant س \leqslant ٥ \end{cases}$

ارسم الشكل البيانى للدالة واستنتج من الرسم مجال الدالة ومداها.

الحل



د(س) = ٣ - س تمثل دالة خطية على الفترة س ∈]-٢ ، ٢[

وبالمثل د(س) = س تمثل دالة خطية على الفترة س ∈ [٢ ، ٥]

لذلك نوجد:

د(-٢) = ٣ - (-٢) = ٥

د(٢) = ٢

د(٥) = ٥

من الرسم نجد أن:

مجال الدالة = [-٢ ، ٥]

مدى الدالة =]١ ، ٥]

حاول أن تحل

(٣) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ١ & \text{عندما } -٢ \leqslant س < ٠ \\ س + ١ & \text{عندما } س \leqslant ٠ \end{cases}$

ارسم الشكل البيانى للدالة، واستنتج من الرسم مجال الدالة ومداها.

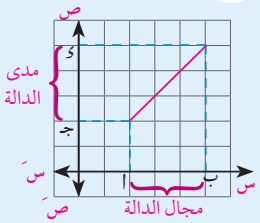
(٤) **الربط بالتجارة:** تمثل الدالة د حيث

$د(س) = \begin{cases} \frac{٥}{٢} س & \text{حيث } ٠ \leqslant س \leqslant ٥٠٠٠ \\ ٢س + ٢٥٠٠ & \text{حيث } ٥٠٠٠ < س \leqslant ١٥٠٠٠ \\ \frac{٣}{٢} س + ١٠٠٠٠ & \text{حيث } ١٥٠٠٠ < س \leqslant ٦٠٠٠٠ \end{cases}$

المبلغ بالجنيه الذى تتقاضاه شركة لتوزيع أحد الأجهزة الكهربية، حيث س تمثل عدد الأجهزة الموزعة، أوجد:

أ د(٥٠٠٠)　　ب د(١٠٠٠٠)　　ج د(٥٠٠٠٠)

لاحظ أن



في الشكل البياني الممثل للدالة د

مجال الدالة = [أ ، ب]

مدى الدالة = [جـ ، ء]

الحل

أ لإيجاد د(٥٠٠٠) نستخدم القاعدة د(س) = $\frac{٥}{٢}$س

د(٥٠٠٠) = $\frac{٥}{٢}$ × ٥٠٠٠ بالتعويض عن س = ٥٠٠٠

د(٥٠٠٠) = ١٢٥٠٠ جنيه

ب لإيجاد د(١٠٠٠٠)

نلاحظ أن ١٠٠٠٠ أكبر من ٥٠٠٠ وأقل من ١٥٠٠٠؛ لذلك نستخدم القاعدة د(س) = ٢س + ٢٥٠٠

د(١٠٠٠٠) = ٢ × ١٠٠٠٠ + ٢٥٠٠ بالتعويض عن س = ١٠٠٠٠

د(١٠٠٠٠) = ٢٢٥٠٠ جنيه

ج لإيجاد د(٥٠٠٠٠)

نلاحظ أن ٥٠٠٠٠ أكبر من ١٥٠٠٠ وأقل من ٦٠٠٠٠

د(٥٠٠٠٠) = $\frac{٣}{٢}$ × ٥٠٠٠٠ + ١٠٠٠٠ بالتعويض عن س = ٥٠٠٠٠

د(٥٠٠٠٠) = ٨٥٠٠٠ جنيه

حاول أن تحل

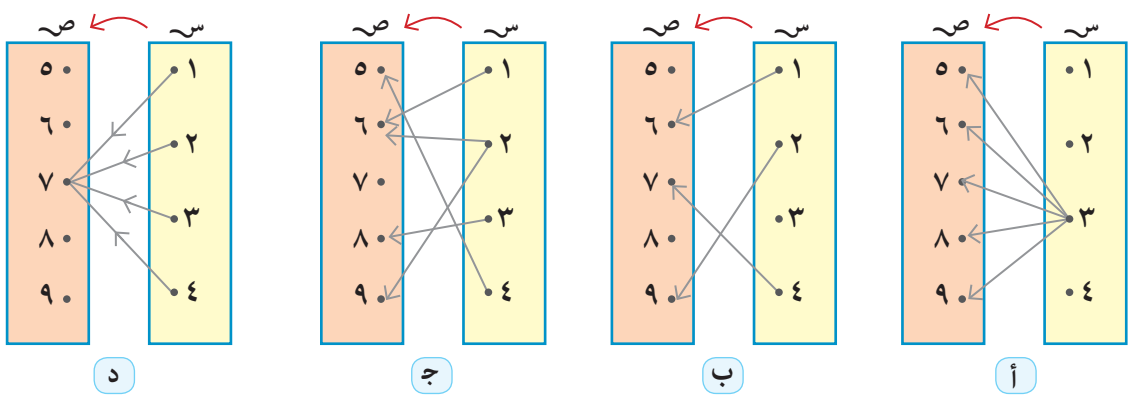
٤ إذا كان د(س) = { ٣س حيث ٠ ⩽ س ⩽ ١٢ ؛ ٣٦ حيث ١٢ < س < ٢٤ ؛ ١٨٠ - ٦ س حيث ٢٤ ⩽ س ⩽ ٣٠ } أوجد:

أ د(١٢) ب د(٢٠) ج د(٢٨)

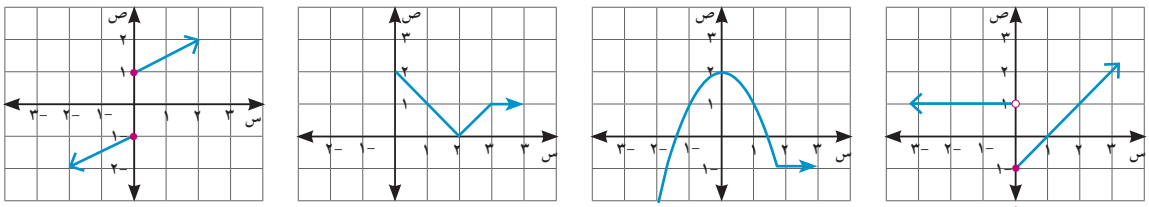
تمـارين الدرس الأول

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ العلاقة المبينة بالمخططات السهمية التالية والتى تمثل دالة هى:-



(٢) العلاقة المبينة فى الأشكال البيانية التالية والتى لا تمثل دالة هى:



(أ) (ب) (جـ) (د)

(٣) أى من العلاقات الآتية لا تمثل دالة؟

(أ) {(١، ٣)، (٣، ٥)، (٥، ٧)، (٧، ٩)}

(ب) {(٢، ٣)، (٣، ٤)، (٢، ١)، (٣، ٥)}

(جـ) {(٠، ٣)، (١، ٣)، (٢، ٣)، (٣، ٣)}

(د) {(-٣، ٥)، (-١، ٥)، (٠، ٥)، (٢، ٥)}

(٤) جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة فى س ما عدا العلاقة:

(أ) ص = ٣س + ١ (ب) ص = س^{٢} - ٤ (جـ) س = ص^{٢} - ٢ (د) ص = حا س

أجب عن مايأتى:

(٥) عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

أ $د_{١}(س) = \frac{س + ٣}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

ب $د_{٢}(س) = \frac{س + ١}{س^{٣} + ١}$

جـ $د_{٣}(س) = \sqrt{س - ٢}$

د $د_{٤}(س) = \sqrt{٤ - س^{٢}}$

هـ $د_{٥}(س) = \frac{٣س}{\sqrt{٢س - ١}}$

و $د_{٦}(س) = \frac{١}{س} + \frac{١}{س + ٢}$

(٦) إذا كانت د: [-٢، ٤] ⟵ ع

حيث $د(س) = \begin{cases} س - ١ & ، ٢ < س \leq ٤ \\ -١ & ، -٢ \leq س \leq ٢ \end{cases}$

ارسم الشكل البيانى للدالة د ، ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

(٧) ارسم منحنى الدالة د حيث:

$د(س) = \begin{cases} س + ٣ & ، س \leq ٢ \\ ٢س - ١ & ، س > ٢ \end{cases}$

ومن الرسم استنتج المدى.

(٨) إذا كانت الدالة د: [-٢، ٤] ⟵ ع حيث:

$د(س) = \begin{cases} ٢س + ٣ & \text{عندما } -٢ \leq س < ٠ \\ ١ - س & \text{عندما } ٠ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

ارسم الشكل البيانى للدالة د، ومن الرسم استنتج مدى الدالة

٩ إذا كانت د: [-٣، ٣] ⟵ ع ، د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ & \text{عندما } -٣ \leqslant س < ٠ \\ س + ٢ & \text{عندما } ٠ \leqslant س \leqslant ٣ \end{cases}$

ارسم الشكل البيانى للدالة ومن الرسم استنتج مدى هذه الدالة

١٠ إذا كان: د(س) = $\begin{cases} -٤س + ٣ & \text{حيث } س < ٣ \\ -س^{٣} & \text{حيث } ٣ \leqslant س \leqslant ٨ \\ ٣س^{٢} + ١ & \text{حيث } س > ٨ \end{cases}$

أوجد:

أ د(٢)　　ب د(٣)　　ج د(١٠)

١١ الربط بالهندسة: إذا كان ح محيط مربع طول ضلعه ل. اكتب محيط المربع كدالة في طول ضلعه، ع (ل) ثم أوجد

أ ح (٣)　　ب ح($\frac{١٥}{٤}$)

١٢ الربط بالهندسة: إذا كانت م مساحة دائرة طول نصف قطرها نق. اكتب المساحة كدالة فى طول نصف القطر م (نق) ثم أوجد م($\frac{١}{٢}$) ، م(٥).

١٣ الربط بالفيزياء: إذا كانت سرعة دراجة بخارية ع(ن) بالسنتيمتر / ثانية تعطى بالدالة ع حيث:

ع(ن) = $\begin{cases} ٨ن & \text{حيث } ٠ \leqslant ن \leqslant ١٠ \\ ٨٠ & \text{حيث } ١٠ < ن < ٢٠٠ \\ -٤ن + ٨٨٠ & \text{حيث } ٢٠٠ \leqslant ن \leqslant ٢٢٠ \end{cases}$

حيث ن الزمن بالثانية، أوجد:

أ ع(١٠)　　ب ع(١٥٠)　　ج ع(٢١٠)

الدرس ٢

بعض خواص الدوال
Some properties of functions

سوف تتعلم
- التماثل فى الدوال.
- الدوال الزوجية.
- الدوال الفردية.
- الدوال الأحادية.

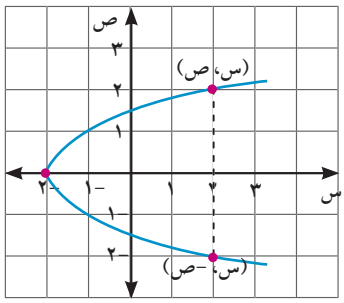
المصطلحات الأساسية

تماثل	*Symmetry*
دالة زوجية	*even function*
دالة فردية	*odd function*
دالة أحادية	*one – to –one function*
خط أفقى	*Horizontal line*

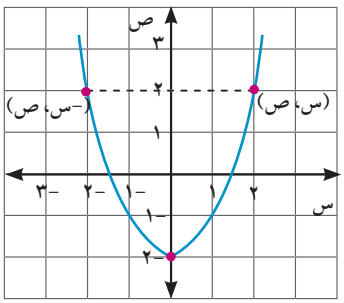
الأدوات المستخدمة
- آله حاسبة علمية – برامج رسومية للحاسوب

تمهيد

سبق أن درست التماثل حول مستقيم، حيث يمكن طى الشكل على المستقيم؛ لينطبق نصفا المنحنى تمامًا، ودرست كذلك التماثل حول نقطة الأصل.



التماثل حول محور السينات
شكل (١)



التماثل حول محور الصادات
شكل (٢)

فى شكل (١):

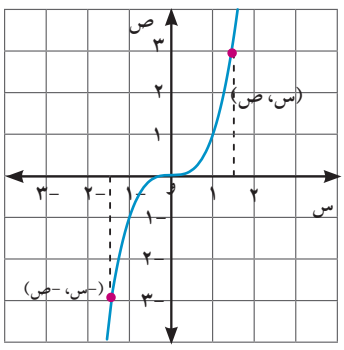
تكون النقطة (س ، - ص) الواقعة على الشكل البيانى لمنحنى الدالة هى صورة النقطة (س ، ص) الواقعة عليه أيضًا بالانعكاس حول محور السينات.

فى شكل (٢):

تكون النقطة (- س ، ص) الواقعة على الشكل البيانى لمنحنى الدالة هى صورة النقطة (س ، ص) الواقعة عليه أيضًا بالانعكاس حول محور الصادات.

فى شكل (٣):

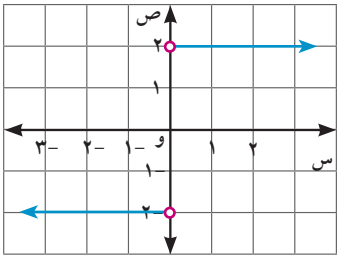
يوضح الشكل البيانى للعلاقة بين س ، ص تماثل المنحنى حول نقطة الأصل، حيث إن النقطة (-س، -ص) هي صورة النقطة (س، ص) الواقعة على نفس المنحنى.



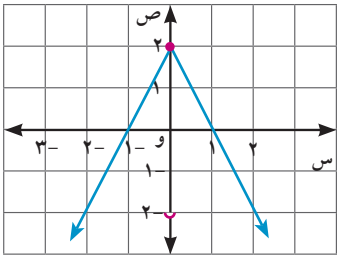
التماثل حول محور نقطة الأصل.
شكل (٣)

حاول أن تحل

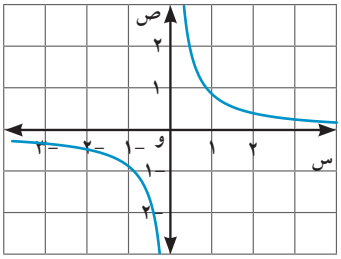
(١) فى كل شكل من الأشكال الآتية بيِّن المنحنيات المتماثلة حول محور الصادات والمنحنيات المتماثلة حول نقطة الأصل.



(أ)



(ب)



(جـ)

الدوال الزوجية والدوال الفردية:

تعلم

الدالة الزوجية: يقال للدالة د إنها زوجية إذا كان لكل - س ، س فى مجال الدالة د تكون د (- س) = د (س)، ويكون منحنى الدالة الزوجية متماثلًا حول محور الصادات.

الدالة الفردية: يقال للدالة د إنها فردية إذا كان لكل - س ، س فى مجال الدالة د يكون د (- س) = - د (س)، ويكون منحنى الدالة الفردية متماثلًا حول نقطة الأصل.

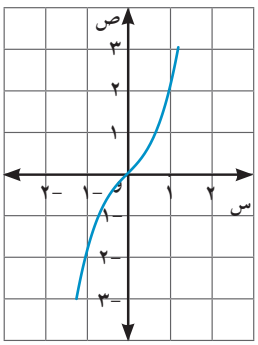
مثال

(١) باستخدام أحد البرامج الرسومية مثِّل كل الدالة د بيانيًّا، ثم حدد إذا ما كانت الدالة د زوجية أو فردية أو غير ذلك، ثم تحقق من إجابتك جبريًّا.

أ د (س) = س^{٣} + س　　ب د(س) = ٢ - س^{٢}　　جـ د(س) = س^{٢} - ٤س

الحل

أ د (س) = س^{٣} + س، واضح من الشكل البيانى أن منحنى الدالة متماثل حول نقطة الأصل ولتحقيق ذلك جبريًّا نجد أن:



د (-س) = (- س)^{٣} + (- س)

بالتبسيط:

د (-س) = - س^{٣} - س

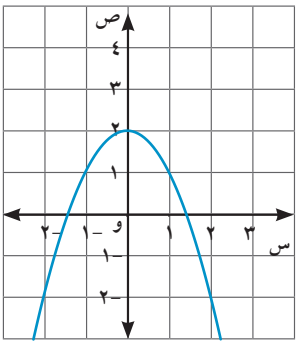
نأخذ (-١) عاملًا مشتركًا

د (-س) = - (س^{٣} + س)

د (-س) = - د (س)

أى أن الدالة فردية.

ب د (س) = ٢ - س^{٢}



من الشكل البيانى المجاور يتضح أن منحنى الدالة متماثل بالنسبة لمحور الصادات؛ أى أن الدالة زوجية، ولتحقيق ذلك جبريًّا نجد أن:

د (-س) = ٢ - (-س)^{٢}

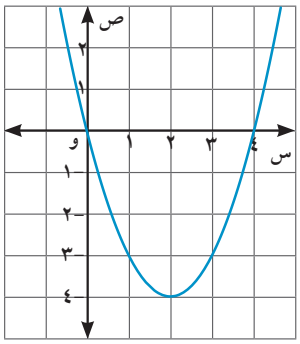
بالتبسيط د (-س) = ٢ - س^{٢}

د (-س) = د (س)

أى أن الدالة زوجية

جـ د (س) = س^{٢} - ٤س من الشكل البيانى المجاور يتضح أن منحنى الدالة ليس متماثلًا حول محور الصادات، وليس متماثلًا بالنسبة لنقطة الأصل؛ أى أن الدالة ليست زوجية وليست فردية، ولتحقيق ذلك جبريًّا:

د (-س) = (-س)^{٢} - ٤ (-س)



بالتبسيط د (-س) = س^{٢} + ٤س

ولكن - د (س) = - س^{٢} + ٤ س

لذلك فإن د (-س) ≠ - د (س)

وكذلك - د (- س) ≠ د (س)

∴ الدالة ليست زوجية

∴ الدالة ليست فردية.

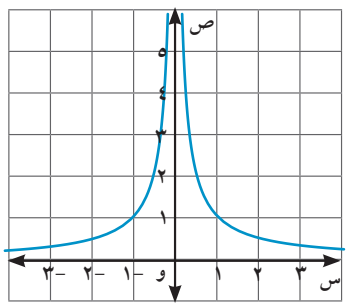
حاول أن تحل

(٢) ابحث أى من الدوال الآتية زوجية وأيها فردية وأيها غير ذلك؟

أ د$_{١}$ (س) = س + $\frac{١}{س}$ ب د$_{٢}$ (س) = س حا س جـ د$_{٣}$ (س) = ٤ $\sqrt[٣]{س}$

مثال

(٢) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} -\frac{١}{س} & \text{عندما } س < ٠ \\ \frac{١}{س} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$



بين أن هذه الدالة زوجية وتحقق من ذلك جبريًّا.

الحل

من الشكل البيانى المجاور يتضح أن منحنى الدالة متماثل حول محور الصادات؛ أى أن الدالة زوجية.

التحقيق الجبرى:

باستبدال المتغير (-س) بالمتغير (س)

: د (-س) = $\begin{cases} -\frac{١}{(-س)} & \text{عندما } (-س) > ٠ \\ \frac{١}{(-س)} & \text{عندما } (-س) > ٠ \end{cases}$

بالتبسيط

$$\text{د}(-\text{س}) = \begin{cases} \frac{١}{\text{س}} & \text{عندما س} > ٠ \\ -\frac{١}{\text{س}} & \text{عندما س} < ٠ \end{cases}$$

بتبديل كتابة القاعدتين

$$\text{د}(-\text{س}) = \begin{cases} -\frac{١}{\text{س}} & \text{عندما س} > ٠ \\ \frac{١}{\text{س}} & \text{عندما س} < ٠ \end{cases}$$

أى أن د (-س) = د (س) فالدالة زوجية.

حاول أن تحل

(٣) مثِّل الدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} \text{س} + ٢ & \text{حيث س} \leqslant -٢ \\ -\text{س} - ٢ & \text{حيث س} > -٢ \end{cases}$ بيانيًّا.

ثم بيِّن: هل الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك وتحقق من ذلك جبريًّا.

الدالة الأحادية: *One - to - one function (injective function)*

تعريف

١ الدالة د: س ⟵ ص تسمى **دالة أحادية** إذا كان:

لكل أ، ب ∈ س ، د (أ) = د (ب) **فإن** أ = ب

أو لكل أ ≠ ب **فإن** د (أ) ≠ د (ب)

مثال

(٣) أثبت أن كلًّ من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية دوال أحادية

أ د(س) = س + ٢

ب $\text{ر}(\text{س}) = \frac{٢\text{س} - ٣}{٤\text{س} + ٥}$

الحل

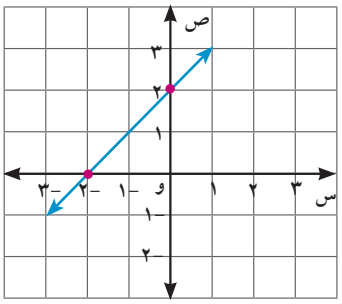
إذا كان أ، ب ∈ ع فإن :

أ **وبالتعويض عن قيمتى أ، ب فى د فإن:**

د (أ) = أ + ٢ ، د (ب) = ب + ٢ **بوضع د (أ) = د (ب) فإن:**

أ + ٢ = ب + ٢ **وبحذف ٢** من الطرفين **فإن** أ = ب

لذلك فإن د دالة أحادية



ب $\text{ر}(\text{أ}) = \frac{٢\text{أ} - ٣}{٤\text{أ} + ٥}$ ، $\text{ر}(\text{ب}) = \frac{٢\text{ب} - ٣}{٤\text{ب} + ٥}$

بوضع ر (أ) = ر (ب) **فإن** $\frac{٢\text{أ} - ٣}{٤\text{أ} + ٥} = \frac{٢\text{ب} - ٣}{٤\text{ب} + ٥}$

بالضرب التبادلى ٨ أ ب + ١٠ أ - ١٢ ب - ١٥ = ٨ أ ب - ١٢ أ + ١٠ ب - ١٥

بالحذف والتبسيط ١٠ أ + ١٢ أ = ١٠ ب + ١٢ ب ∴ ٢٢ أ = ٢٢ ب

بالقسمة على ٢٢ أ = ب

لذلك فإن ر دالة أحادية.

اختبار الخط الأفقي: اذا قطع خط أفقي منحنى الدالة في أكثر من نقطة فإن المنحنى لا يمثل دالة احادية.

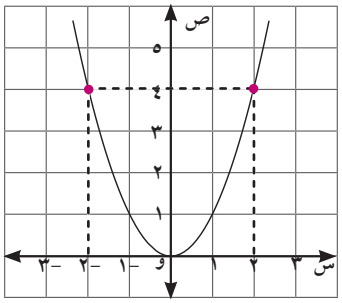
حاول أن تحل

(٤) أثبت أن كلًا من الدالتين د، ر دالة أحادية.

أ د (س) = ٢س - ٣ ب ر (س) = $\frac{٣س - ٥}{٤س + ٣}$

مثال

(٤) بيِّن أن الدالة د حيث د (س) = س^{٢} ليست دالة أحادية.



الحل

د(٢) = ٤ ، د(-٢) = ٤ ∴ د (-٢) = د (٢) = ٤

∵ -٢ ≠ ٢ ∴ د ليست أحادية

ونلاحظ أن الخط الأفقى عند ص = ٤ يناظر قيمتين غير متساويتين للمتغير س هما -٢ ، ٢.

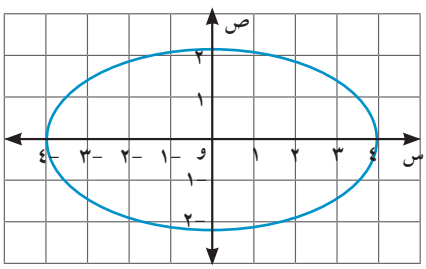
حاول أن تحل

(٥) بين أن كل من الدالتين د، ر ليست أحادية

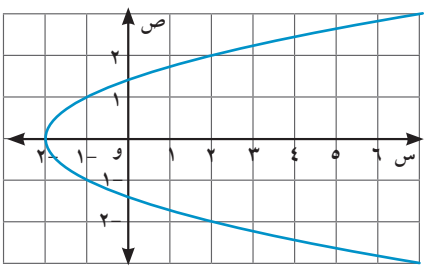
أ د (س) = س^{٢} - ١ ب ر (س) = س^{٢} - ٥س + ٦

تمـارين الدرس الثانى

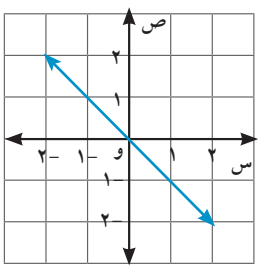
(١) اذكر ما إذا كان تماثل المنحنى حول محور السينات أو محور الصادات أو نقطة الأصل ثم فسِّر إجابتك.



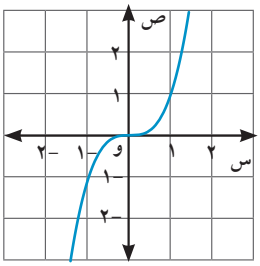
شكل (١)



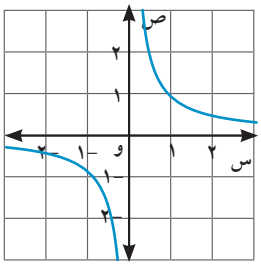
شكل (٢)



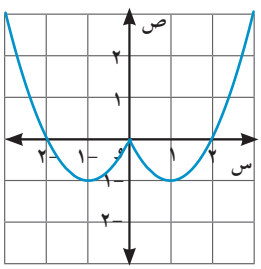
شكل (٣)



شكل (٤)

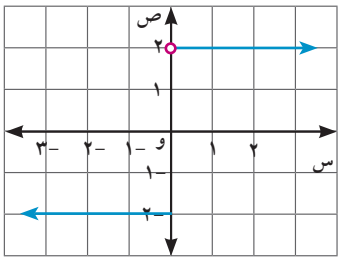


شكل (٥)

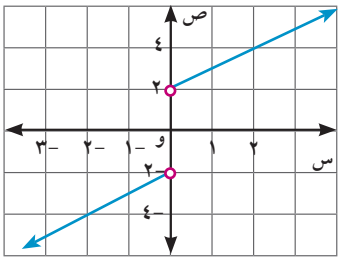


شكل (٦)

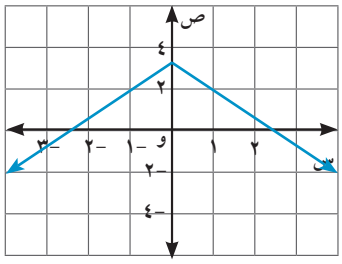
٢ أوجد مدى كل دالة وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.



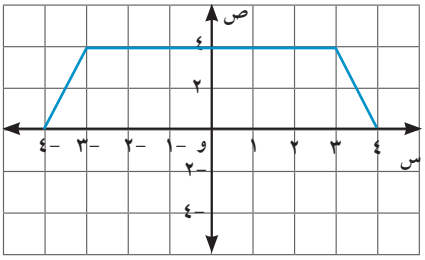
شكل (١)



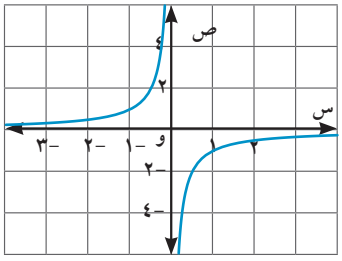
شكل (٢)



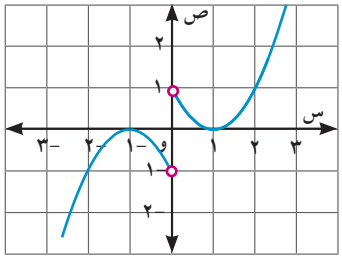
شكل (٣)



شكل (٤)



شكل (٥)



شكل (٦)

٣ استخدم أحد البرامج الرسومية فى رسم منحنيات كل من الدوال المعرفة كمايلى، ومن الرسم صف تماثل منحنى كل منها، وبيِّن أيها زوجية وأيها فردية وأيها غير ذلك، ثم تحقق من إجابتك جبريًّا.

أ) د(س) = $س^{٤} + س^{٢} - ١$

ب) د (س) = $٣ س - ٤ س^{٣}$

ج) د (س) = $س^{٣} - \frac{١}{س}$

د) د(س) = $س^{٢} - ٣س$

هـ) د (س) = $\frac{س^{٣} + ٢}{س - ٣}$

و) د(س) = س حتا س

ز) د(س) = $\sqrt{س^{٢} + ٦}$

ح) د(س) = $\frac{س^{٢}}{س + ١}$

٤ استخدم أحد البرامج الرسومية فى رسم منحنيات كل من الدوال المعرفة كمايلى، ثم بين أى منها زوجية وأى منها فردية وأيها غير ذلك، ثم تحقق من ذلك جبريًّا وأوجد مدى كل منها.

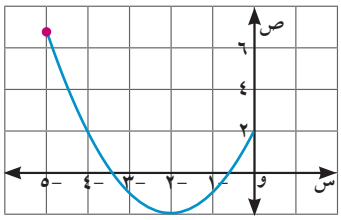
أ) د(س) = $\begin{cases} ٢ & \text{عندما } س \geq ٠ \\ -٢ & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$

ب) د (س) = $\begin{cases} -س^{٣} & \text{عندما } س \leq ٠ \\ س^{٣} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$

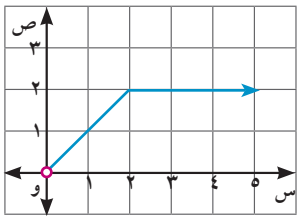
ج) د(س) = { س - ١ عندما س ⩽ ٠ ، ٧س عندما س > ٠ }

د) د(س) = { ٢/س عندما س > ٠ ، -٢/س عندما س < ٠ }

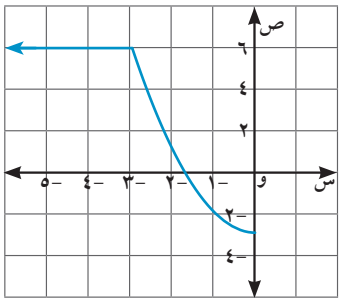
٥) أجب عما يلي من خلال الأشكال الآتية:



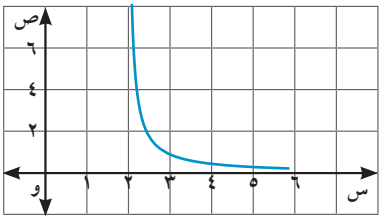
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

أولًا: أكمل رسم شكل (١) وشكل (٣) في كراستك، بحيث تصبح الدالة زوجية على مجالها.

ثانيًا: أكمل رسم شكل (٢) وشكل (٤) في كراستك، بحيث تصبح الدالة فردية على مجالها.

ثم أوجد المدى فى كل حالة.

٦) في كل من الدوال المعرفة كمايلى حدد ما إذا كانت الدالة المعطاة أحادية أم لا ، مع توضيح السبب.

أ) د(س) = ٣ س + ١

ب) د (س) = (٢س + ١) / (س - ٢)

جـ) د(س) = س^{٣} + ١

د) د (س) = ٢س^{٢} - س - ٣

هـ) د(س) = س^{٤} + ٢س + ١

٧) تفكير ابداعى: مثِّل بيانيًّا منحنى يحقق الشروط الآتية:

أ) يمر بالنقط (٠ ، -٢) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٧) ويمثل دالة زوجية.

ب) يمر بالنقط (٠ ، ١) ، (-١ ، ٠) ، (-٢ ، ٧) ويمثل دالة فردية.

الدرس ٣

تابع خواص الدوال
Properties of functions (continue)

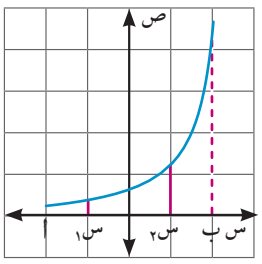
أولاً: إطراد الدوال: *Monotony of the functions*

تمهيد

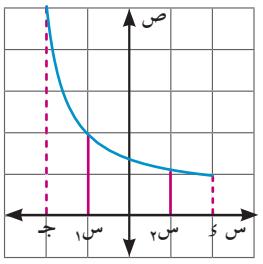
سبق أن درست بعض الدوال التى مجالها ع أو مجموعة جزئية منها، فهل يمكنك تحديد الفترات من مجال هذه الدوال التى تكون فيها الدالة تزايدية والفترات التى تكون فيها الدالة تناقصية والفترات التى تكون الدالة فيها ثابتة؟

إن تحديد هذه الفترات هو مايعرف بإطراد الدالة.

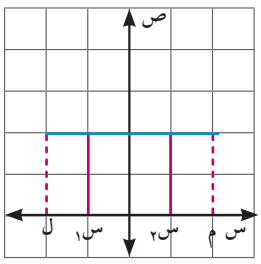
تعلم



يقال للدالة د أنها:
تزايدية فى الفترة]أ ، ب[
إذا كان لكل
س١ ، س٢ ∈]أ ، ب [
حيث: س٢ > س١
فإن د(س٢) > د(س١)



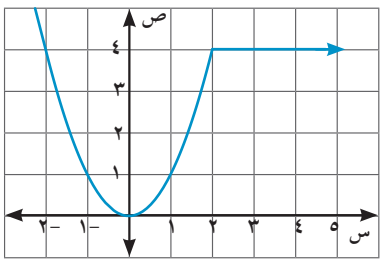
يقال للدالة د أنها:
تناقصية فى الفترة]جـ ، ء[
إذا كان لكل
س١ ، س٢ ∈]جـ ، ء[
حيث: س٢ > س١
فإن د(س٢) < د(س١)



يقال للدالة د أنها:
ثابتة فى الفترة]ل ، م[
إذا كان لكل
س١، س٢ ∈]ل ، م[
حيث س٢ > س١
فإن د(س٢) = د(س١)

مثال

(١) ابحث إطراد الدالة الممثلة فى الشكل البيانى المقابل.



الحل

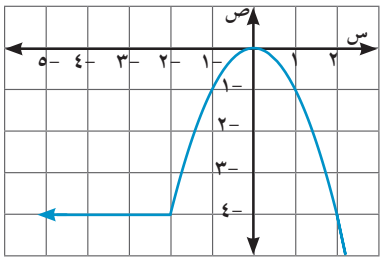
- الدالة تناقصية فى الفترة]-∞، ٠[
- الدالة تزايدية فى الفترة]٠، ٢[
- الدالة ثابتة فى الفترة]٢، ∞[

سوف تتعلم
- إطراد الدوال.
- العمليات على الدوال الحقيقية.
- تركيب الدوال (نشاط).

المصطلحات الأساسية
- إطراد. *monotony*
- دالة تزايدية. *increasing function*
- دالة تناقصية. *decreasing function*
- دالة ثابتة. *constant function*

الأدوات المستخدمة
- ألة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

حاول أن تحل



(١) فى الشكل المقابل:
ابحث الفترات التى تكون فيها الدالة تزايدية والفترات التى تكون فيها تناقصية والفترات التى تكون فيها ثابتة.

ثانيًا: العمليات على الدوال الحقيقية: *Operations on real functions*

تعلم

إذا كانت د١ ، د٢ دالتين مجالاهما م١، م٢ فإن:

١ (د١ ± د٢) (س) = د١ (س) ± د٢(س) ، مجال (د١ ± د٢) هو م١ ∩ م٢

٢ (د١ . د٢) (س) = د١ (س). د٢(س) ، مجال (د١. د٢) هو م١ ∩ م٢

٣ $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)(س) = \frac{د_١(س)}{د_٢(س)}$ حيث د٢ (س) ≠ ٠ مجال $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)$ هو (م١ ∩ م٢) - ف (د٢)
حيث ف (د٢) مجموعة أصفار د٢

نلاحظ أنه فى جميع الحالات السابقة أن مجال الدالة الجديدة يساوى تقاطع مجالى د١، د٢ باستثناء القيم التى تجعل د٢(س) = ٠ فى عملية القسمة.

مثال

(٢) إذا كان د(س) = س^{٢} + ٤س ، ر (س) = $\sqrt{٨ س + ٢}$ ، ع(س) = ٣ س - ٥
أوجد كل من الدوال الآتية وعيِّن مجالها:

أ (د + ر) (س) ب (د - ع) (س)

جـ (د. ع) (س) د $\left(\frac{ع}{د}\right)$ (س)

الحل

مجال الدالة د هو ع ، ومجال الدالة ر هو [-٢ ، ∞ [ومجال الدالة ع هو ع

أ (د + ر) (س) = د(س) + ر (س)

= س^{٢} + ٤س + $\sqrt{٨ س + ٢}$

ومجال الدالة (د + ر) هو

ع ∩ [-٢، ∞ [= [-٢ ، ∞ [

ب (د - ع) (س) = د(س) - ع (س)

= س^{٢} + ٤س - ٣ س + ٥

= س^{٢} + س + ٥

ومجال (د - ع) هو: ع ∩ ع = ع

جـ (د.ع) (س) = د(س).ع (س)

= (س^{٢} + ٤س) (٣س - ٥)

= ٣س^{٣} - ٥س^{٢} +١٢س^{٢} - ٢٠ س

= ٣س^{٣} + ٧س^{٢} - ٢٠س

∵ مجال كل من د ، ع هو ع ∴ مجال (د.ع) هو ع

د $(\frac{ع}{د})(س) = \frac{ع(س)}{د(س)} = \frac{٣س - ٥}{س^{٢} + ٤س}$

∵ مجال كل من د ، ع هو ع، ولكن س = ٠ س = -٤ تجعلان مقام $(\frac{ع}{د})$= صفر

∴ مجال $\frac{ع}{د}$ هو ع - {-٤ ، ٠}

٩ حاول أن تحل

(٢) أوجد: (د + ر) (س) ، (د - ر) (س) ، (د. ر) (س) ، $(\frac{د}{ر})$ (س)فى كل ممايأتى

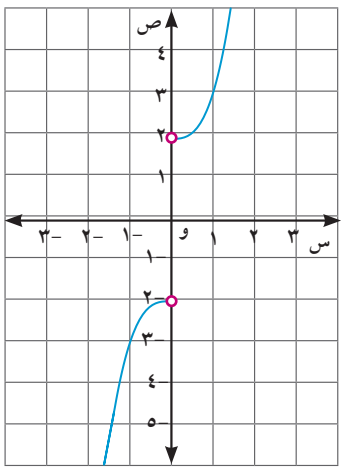
ثم أوجد مجال كل دالة من الدوال الناتجة:

أ د(س) = س - ٤ ، ر (س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$

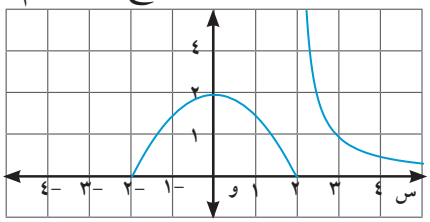
ب د(س) = س^{٢} - ٦س - ٨ ، ر (س) = $\sqrt{س}$

تمـــاريـن الدرس الثالث

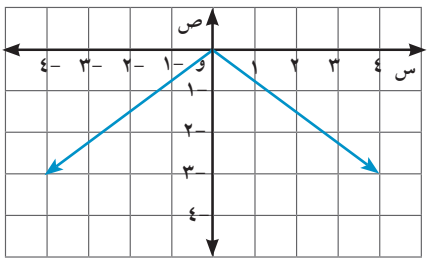
(١) الأشكال الآتية تمثل الشكل البيانى لبعض الدوال، استنتج من الرسم المدى وابحث الإطراد:



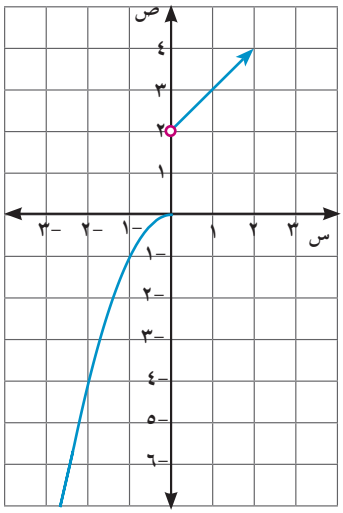
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

(٢) إذا كان: د$_{١}$: ع ⟵ ع حيث د$_{١}$(س) = ٣س - ١ ، د$_{٢}$: [-٢، ٣] ⟵ ع حيث د$_{٢}$ (س) = ٢ س + ٤
فأوجد: (د$_{١}$ + د$_{٢}$) (س) ، (د$_{١}$ - د$_{٢}$) (س)

(٣) إذا كانت: د$_{١}$: ع ⟵ ع حيث د$_{١}$(س) = ٢س +٣ ، د$_{٢}$: [-٥، ٧] ⟵ ع حيث د$_{٢}$ (س) = س + ٢ فأوجد:
أولاً: (د$_{١}$ + د$_{٢}$) (س) مبينًا مجالها **ثانيًا:** (د$_{١}$ + د$_{٢}$) (صفر)

(٤) إذا كانت: د$_{١}$(س) = س+٢ ومجالها هو [-٣، ٤] ، د$_{٢}$(س) = س^{٢} + ٢س ومجالها هو [-١ ، ٣] ، أوجد:
(د$_{١}$ + د$_{٢}$) (س) ، (د$_{٢}$ - د$_{١}$) (س) ، $(\frac{د_{١}}{د_{٢}})$ (س) ، $(\frac{د_{٢}}{د_{١}})$ (س) مبينًا مجال كل منها.

(٥) إذا كان: د(س) = س + ١ ، ر (س) = س^{٢} - ١ فأوجد:
(د . ر) (س) ، $(\frac{د}{ر})$ (س) ، $(\frac{ر}{د})$ (س) مبينًا مجال كل منها.

(٦) إذا كان د$_{١}$:]-٢ ، ٠[⟵ ع حيث د$_{١}$ (س) = ٣ - س
د$_{٢}$:]-١ ، ١[⟵ ع حيث د$_{٢}$ (س) = ٣ + س فأوجد:

(د$_{١}$ + د$_{٢}$) (س) ، (د$_{١}$ - د$_{٢}$) (س) ، (د$_{١}$. د$_{٢}$) (س) ، $(\frac{د_{١}}{د_{٢}})$ (س) ثم اكتب مجال كل منها

الدرس ٤

تحويلات الرسوم البيانية
Transformations of graphs

سوف تتعلم
- الدالة كثيرة الحدود.
- التحويلات الهندسية للدالة الخطية .
- التحويلات الهندسية لدالة المقياس .
- التحويلات الهندسية للدالة التربيعية.
- التحويلات الهندسية للدالة التكعيبية.
- التحويلات الهندسية للدالة الكسرية.
- التحويلات الهندسية لبعض الدوال المثلثية.

المصطلحات الأساسية
- تحويل هندسي. *Transformation*
- إزاحة. *Translation*
- انعكاس. *Reflection*

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

الدالة كثيرة الحدود *Polynomial functions*

سبق أن درست الدالة كثيرة الحدود التى قاعدتها على الصورة:

د(س) = $أ_{0}$ + $أ_{1}$س + $أ_{2}$$س^{2}$ + $أ_{3}$$س^{3}$ +..... + $أ_{ن}$$س^{ن}$

حيث: $أ_{0}$ ، $أ_{1}$ ، $أ_{2}$ ، $أ_{3}$ ،..... ، $أ_{ن}$ ∈ ع ، $أ_{ن}$ ≠ ٠

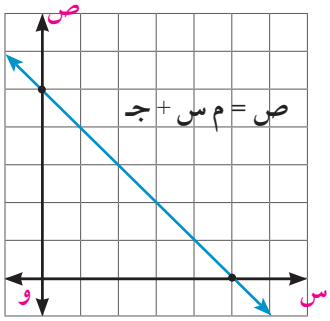
وعلمت أن المجال والمجال المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح (مالم يذكر غير ذلك) ، ولذلك تسمى هذه الدوال بدوال كثيرة الحدود من الدرجة ن ، ودرجة كثيرة الحدود هى أعلى قوة يأخذها المتغير المستقل س.

وفيما يلى سوف نتناول دراسة لبعض الدوال كثيرة الحدود.

تعلم

الدالة الخطية: Linear function

هى دالة تكتب بالصورة: د(س) = م س + جـ حيث م ، جـ ثوابت ، (م هو ميل الخط المستقيم ، جـ الجزء المقطوع من محور الصادات).



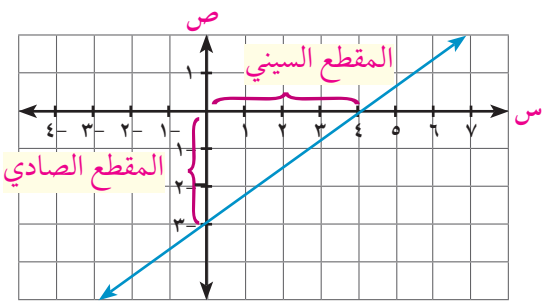
مثال

(١) اكتب الدالة التى يمثلها الخط المستقيم الذى ميله $\frac{٣}{٤}$، ويقطع من محور الصادات جزءًا سالبًا طوله ٣ وحدات ثم مثله بيانيًّا.

الحل

د (س) = م س + جـ

بالتعويض عن: م = $\frac{٣}{٤}$ ، جـ = - ٣: د(س) = $\frac{٣}{٤}$ س - ٣



حاول أن تحل

(١) اكتب الدالة التى يمثلها الخط المستقيم فى الحالات الآتية ثم مثِّله بيانيًّا:

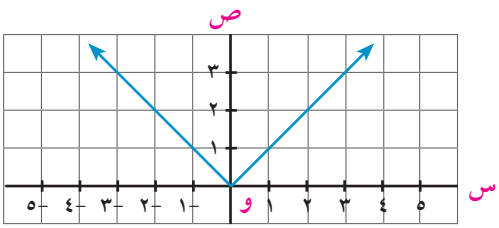
أ ميله = $\frac{-٣}{٤}$ ومقطعه الصادى = ٦ ب ميله = $\frac{١}{٢}$ ومقطعه الصادى = - ٤

تعلم

دالة المقياس (القيمة المطلقة): The absolute value function

أبسط صورة لدالة المقياس هى د(س) = |س|، وتعرف على النحو التالى:

$$د(س) = \begin{cases} س & ، \ س \geq ٠ \\ -س & ، \ س < ٠ \end{cases}$$



لاحظ أن: |-٣| = |٣| = ٣ ، |٠| = ٠

خواص دالة المقياس: د(س) = |س|

مجالها هو مجموعة الأعداد الحقيقية ، ومداها هو: [٠ ، ∞[منحنى الدالة متماثل حول محور الصادات وبالتالى فإن الدالة زوجية.

التحويلات الهندسية لدالة المقياس: *Geometric transformation of modulus function*

الإزاحة الأفقية (فى اتجاه محور السينات): *Horizontal translation in the direction of x axis*

مثال

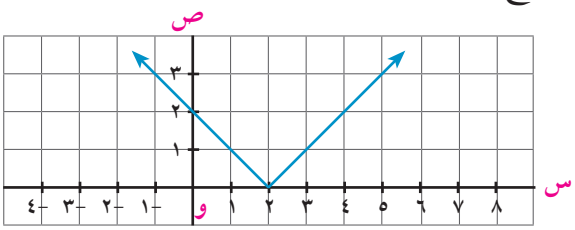
(٢) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل كل دالة من الدالتين ر ، ع:

أ ر(س) = |س - ٢| ب ع(س) = |س + ٣|

الحل

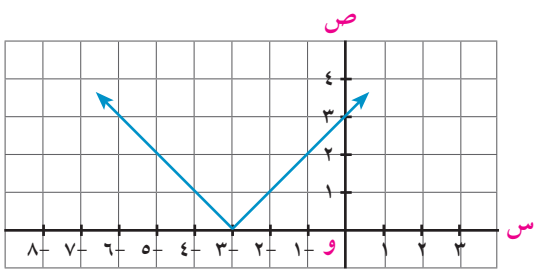
أ هذه الدالة على الصورة: ر(س) = د (س - ٢)

وعليه فإن منحنى ر(س) هو منحنى د(س) بإزاحة أفقية قدرها ٢ وحدة إلى اليمين.



ب هذه الدالة على الصورة: ع(س) = د (س + ٣)،

وعليه فإن منحنى ع(س) هو منحنى د(س) بإزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات إلى اليسار.



حاول أن تحل

(٢) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع:

أ ر(س) = |س + ٤| ب ع(س) = |س - ٢|

الإزاحة الرأسية (فى اتجاه محور الصادات): *Vertical translation (in the direction of Y axis)*

مثال

٣ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل كل دالة من الدالتين ر ، ع:

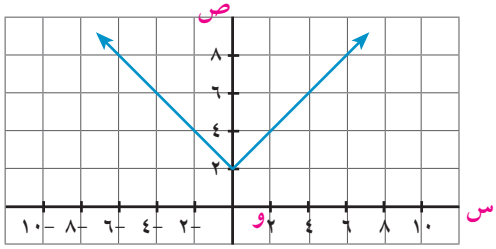
أ ر(س) = |س| + ٢ ب ع(س) = |س| - ٤

الحل

أ هذه الدالة على الصورة:

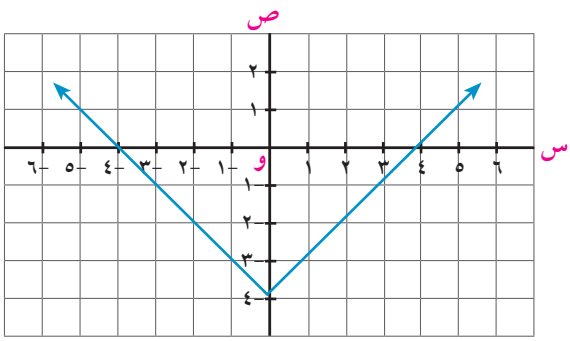
ر(س) = د(س) + ٢

وعليه فإن منحنى ر(س) هو منحنى د(س) بإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة إلى أعلى.



ب هذه الدالة على الصورة: ع(س) = د(س) – ٤

وعليه فإن منحنى ع(س) هو منحنى د(س) بإزاحة رأسية قدرها ٤ وحدة إلى أسفل.



حاول أن تحل

٣ استخدم منحنى الدالة حيث د(س) = |س| لتمثيل كل دالة من الدالتين ر ، ع:

أ ر(س) = |س| - ٥ ب ع (س) = |س| + ٦

الإزاحة الرأسية والأفقية (فى اتجاه محورى الإحداثيات):

Vertical and horizontal translation (in the direction of the two corrdinate axis)

مثال

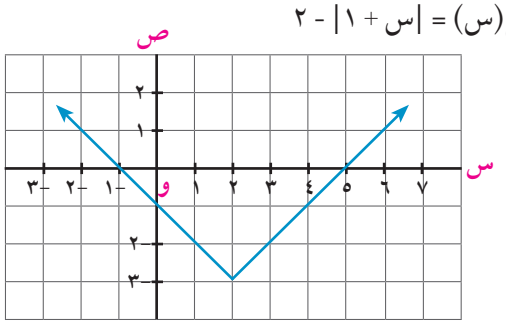
٤ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل كل دالة من الدالتين ر ، ع حيث:

أ ر(س) = |س - ٢| - ٣ ب ع(س) = |س + ١| - ٢

الحل

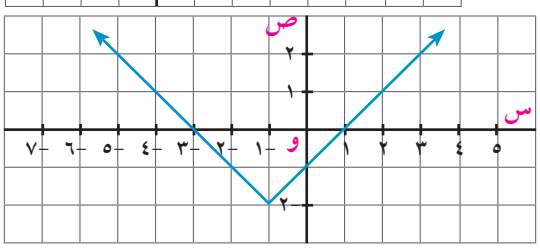
أ هذه الدالة على الصورة ر(س) = |س - ٢| - ٣

أى أن منحنى ر(س) هو منحنى د(س) بإزاحة ٢ وحدة أفقية إلى اليمين و ٣ وحدات رأسية إلى أسفل.



ب هذه الدالة على الصورة ع(س) = |س + ١| - ٢

أى أن منحنى ع(س) هو منحنى د(س) بإزاحة وحدة واحدة أفقية إلى اليسار و٢ وحدة رأسية إلى أسفل.



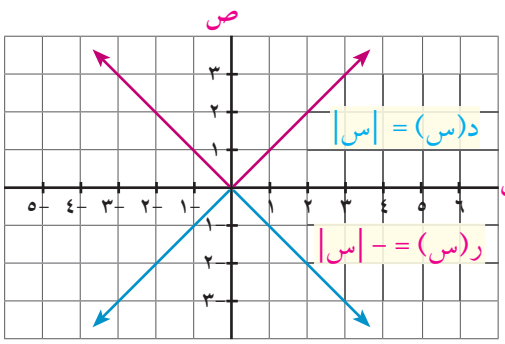
حاول أن تحل

٤ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل كل دالة من الدالتين ر ، ع حيث:

أ ر(س) = |س + ٣| - ١

ب ع(س) = |س - ٢| + ٤

انعكاس دالة المقياس: *Reflection of the modulus function*



منحنى الدالة ر حيث ر(س) = - |س| هو انعكاس لمنحنى الدالة د(س) حيث د(س) = |س| على محور السينات.

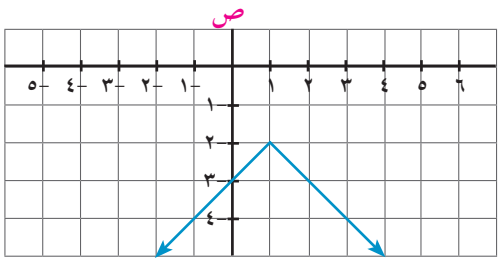
مثال

٥ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

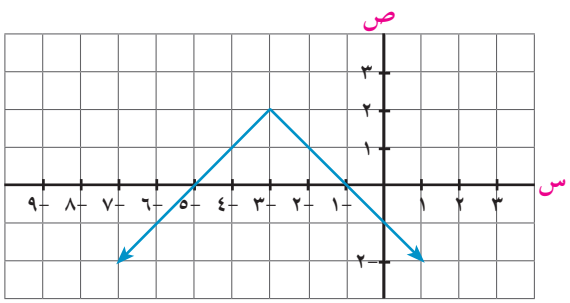
أ ر(س) = - |س - ١| - ٢

ب ع(س) = ٢ - |س + ٣|

الحل



أ منحنى ر(س) هو إنعكاس لمنحنى د(س) على محور السينات ثم إزاحة وحدة واحدة أفقية إلى اليمين و٢ وحدة رأسية إلى أسفل.



ب منحنى ع (س) هو انعكاس لمنحنى د(س) على محور السينات ثم إزاحة ٣ وحدات أفقية إلى اليسار و٢ وحدة رأسية إلى أعلى.

حاول أن تحل

٥ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

أ ر(س) = - |س - ٣| + ١

ب ع(س) = ٢ - |س + ١|

بعض خواص دالة المقياس: *Some properties of the modulus function*

سندرس دالة المقياس التى على الصورة : د(س) = ك |س - أ| + ب حيث ك = ± ١

ومما سبق يمكن استنتاج الخواص الآتية:

- نقطة رأس المنحنى هى: (أ ، ب).
- معادلة محور التماثل هى: س = أ

تعلم

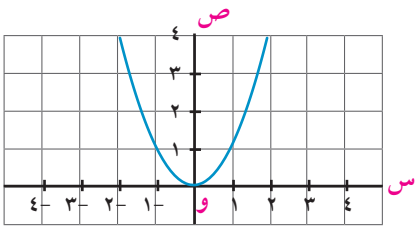
الدالة التربيعية: *Quadratic function*

- سندرس الدالة التربيعية التى على الصورة: د(س) = أ $س^{٢}$ + ب س + جـ حيث أ = ± ١
- وتمثل بيانيًّا بمنحنى متماثل حول مستقيم يوازى محور الصادات، و يمر بنقطة رأس المنحنى وهى:

$$\left(\frac{-ب}{٢أ}\ ،\ د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$$

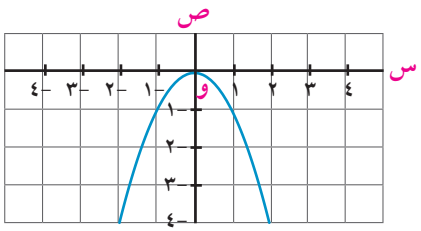
الشكل التالى يمثل أبسط صورة لمنحنى الدالة التربيعية د حيث.

د (س) = $س^{٢}$



- أ = ١ ، ب = ٠ ، جـ = ٠
- نقطة رأس المنحنى هى (٠ ، ٠).
- منحنى الدالة متماثل حول محور الصادات وبالتالى فإن الدالة زوجية.
- مدى الدالة = [٠ ، ∞ [
- الدالة تناقصية فى] - ∞ ، ٠ [وتزايدية فى]٠ ، ∞ [

ومنحنى الدالة د حيث (س) = -$س^{٢}$ هو انعكاس لمنحنى د (س) = $س^{٢}$ في محور السينات حيث



- أ = - ١ ، ب = ٠ ، جـ = ٠
- نقطة رأس المنحنى هى (٠ ، ٠).
- منحنى الدالة متماثل حول محور الصادات وبالتالى فإن الدالة زوجية.
- مدى الدالة =] - ∞ ، ٠]
- الدالة تزايدية فى] - ∞ ، ٠ [وتناقصية فى]٠ ، ∞ [

بعض التحويلات الهندسية على منحنى الدالة:

نتبع نفس التحويلات الهندسية السابق دراستها فى دالة المقياس وهى د(س ± أ) ، د (س) ± أ ، والأمثلة الآتية توضح ذلك:

مثال

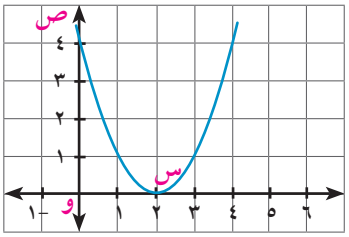
٦ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^{٢}$ لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

أ ر(س) = (س - ٢)^{٢}

ب ع (س) = - (س + ٣)^{٢}

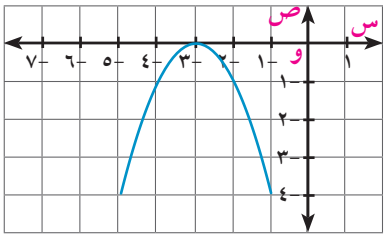
الحل

أ



➤ منحنى ر (س) = (س - ٢)^{٢} هو منحنى د(س) = س^{٢} بإزاحة وحدتين في الاتجاه الموجب لمحور السينات.

ب



➤ منحنى ع (س) = -(س + ٣)^{٢} هو منحنى د(س) = س^{٢} بالانعكاس في محور السينات ثم إزاحته بثلاث وحدات في الاتجاه السالب لمحور السينات.

حاول أن تحل

٦ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

أ ر(س) = (س – ٤)^{٢} ب ع (س) = (س – ٣)^{٢}

إزاحة منحنى الدالة فى اتجاه محور ص (إزاحة رأسية):

Translating the function curve in the direction of Y axis (vertical translation)

مثال

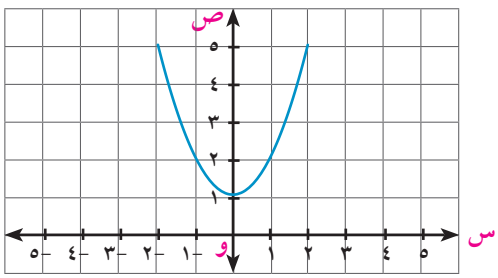
٧ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

أ ر(س) = س^{٢} + ١ ب ع (س) = - $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

➤ ومن الرسم عين نقطة رأس المنحنى وأوجد مدى الدالة.

الحل

أ

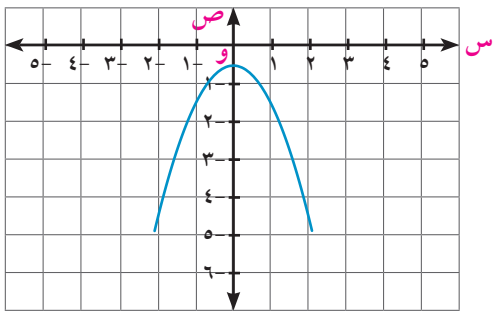


➤ منحنى د(س) = س^{٢} + ١ هو منحنى د(س) = س^{٢} بإزاحة وحدة واحدة في الاتجاه الموجب لمحور الصادات.

➤ نقطة رأس المنحنى هى (٠ ، ١)

➤ مدى الدالة = [١ ، ∞ [

ب



➤ منحنى ع(س) = - $\frac{١}{٢}$ س^{٢} هو منحنى د(س) = س^{٢} بالانعكاس في محور السينات ثم إزاحته نصف وحدة في الاتجاه السالب لمحور الصادات.

➤ نقطة رأس المنحنى هى (٠ ، - $\frac{١}{٢}$).

➤ مدى الدالة =]-∞ ، - $\frac{١}{٢}$[

حاول أن تحل

(٧) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

أ ر(س) = س^{٢} + $\frac{٣}{٢}$ ب ع (س) = - س^{٢} - $\frac{٣}{٢}$

➤ ومن الرسم عين نقطة رأس المنحنى. وعين مدى الدالة.

إزاحة منحنى الدالة فى اتجاهى محورى الإحداثيات:

Translating the function curve in the direction of the two axes coordinate

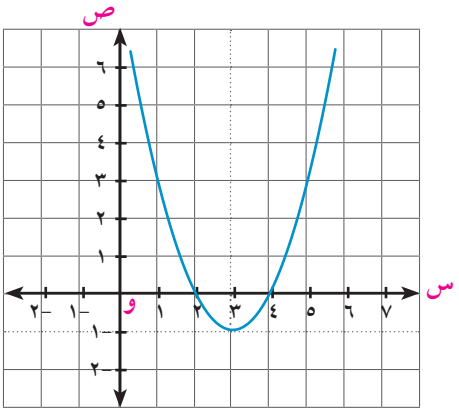
مثال

(٨) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

أ ر(س) = (٣ – س)^{٢} – ١ ب ع (س) = س^{٢} + ٤س + ١

الحل

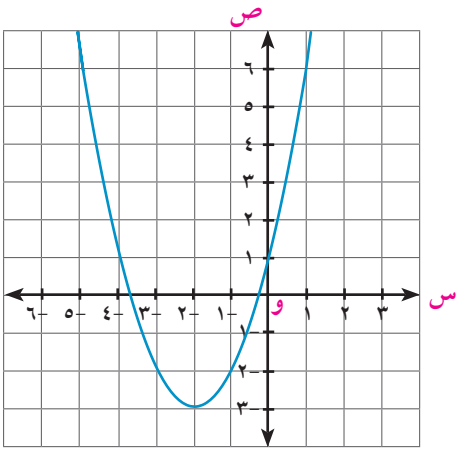
أ



➤ ر (س) = (٣ - س)^{٢} - ١ = (س - ٣)^{٢} - ١

منحنى الدالة ر هو منحنى د (س) = س^{٢} بالإزاحة ثلاث وحدات في الاتجاه الموجب لمحور السينات، ثم وحدة واحدة في الاتجاه السالب لمحور الصادات.

ب



∵ ع (س) = س^{٢} + ٤س + ١

∴ ع (س) = (س^{٢} + ٤س + ٤) - ٣ = (س + ٢)^{٢} - ٣

ومنحنى الدالة ع هو منحنى د(س) = س^{٢} بإزاحة قدرها وحدتان في الاتجاه السالب لمحور السينات، ثم ثلاث وحدات في الاتجاه السالب لمحور الصادات.

حاول أن تحل

(٨) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

أ ر(س) = (س + ٢)^{٢} – ٤

ب ع (س) = ٢ – (س – ٣)^{٢}

➤ ومن الرسم عين إحداثى نقطة رأس المنحنى و إحداثيات نقط تقاطع المنحنى مع محوري الإحداثيات، وابحث إطراد كل من الدالتين.

تذكر أن

نقطة رأس منحنى الدالة:

ص = أ س^{٢} + ب س + جـ ، أ ≠ ٠

$\left(\frac{-ب}{٢أ}، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

بعض خواص الدالة التربيعية:

سندرس الدالة التربيعية التى على الصورة: د(س) = ± (س – أ)^{٢} + ب حيث

- نقطة رأس المنحنى هى (أ ، ب).
- معادلة محور التماثل هى: س = أ.

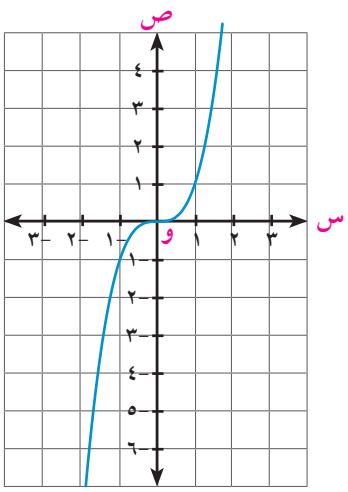
دالة الدرجة الثالثة (الدالة التكعيبية): *Cubic function (third degree function)*

تعلم

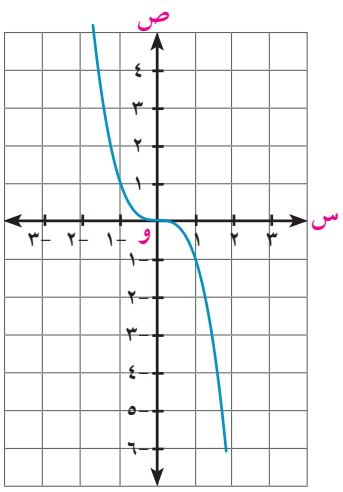
سندرس الدالة التكعيبية التى على الصورة: د(س) = ± (س - أ)^{٣} + ب

أبسط صورة للدالة التكعيبية: *Simplest form of the cubic function*

د(س) = س^{٣}



د(س) = - س^{٣}



- منحنى الدالة متماثل بالنسبة لنقطة الأصل لذلك تكون الدالة فردية.
- مدى الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- الدالة د (س) = س^{٣} تزايدية على ع بينما د (س) = - س^{٣} تناقصية على ع.
- نقطة تماثل الدالة هى (أ ، ب).

بعض التحويلات الهندسية على منحنى الدالة: *Some geometric transformation on the function curve*

- نستخدم نفس التحويلات الهندسية التى سبق دراستها فى الدالة التربيعية ودالة المقياس.

إزاحة منحنى الدالة فى اتجاه محوري الاحداثيات:

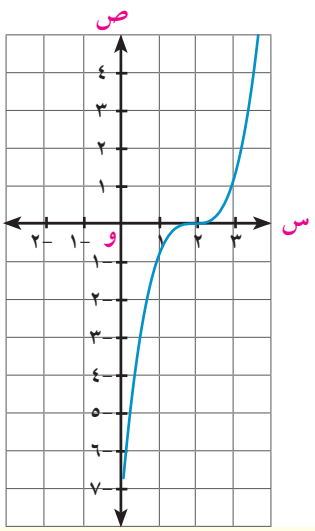
translating the function curve in the direction of the two axes coordinates

مثال

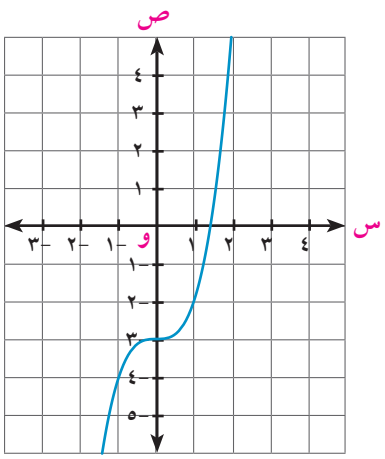
(٩) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٣} لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث::

(أ) ر(س) = (س – ٢)^{٣} (ب) ع(س) = س^{٣} – ٣

الحل



➢ نقطة التماثل للدالة ر هى (٢ ، ٠).



➢ نقطة التماثل للدالة ع هى (٠ ، -٣).

حاول أن تحل

(٩) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٣} لتمثيل كل دالة من الدالتين ر ، ع حيث:

أ ر(س) = (س + $\frac{٣}{٢}$)^{٣} ب ع(س) = ٤ - س^{٣}

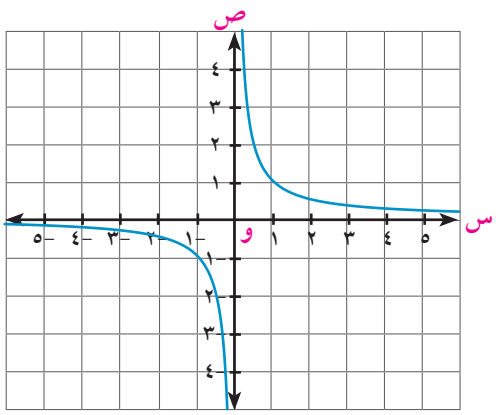
الدالة الكسرية *rational function*

تعلم

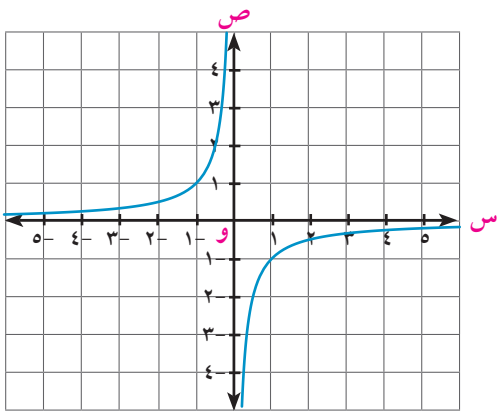
سندرس الدالة الكسرية التى على الصورة د(س) = $\frac{ك}{س}$ حيث ك = ± ١

مجال هذه الدالة هو: ح - {٠} والأشكال البيانية التالية توضح شكل منحنى الدالة.

أ د(س) = $\frac{١}{س}$ حيث س ≠ ٠



ب د(س) = $\frac{-١}{س}$ حيث س ≠ ٠



➢ منحنى الدالة متماثل بالنسبة لنقطة الأصل لذلك تكون الدالة فردية.

➢ مدى الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية ماعدا الصفر.

➢ د (س) = $\frac{١}{س}$ تناقصية في الفترة]-∞ ، ٠[ثم تناقصية في الفترة]٠ ، ∞[.

➢ د (س) = $\frac{-١}{س}$ تزايدية في الفترة]-∞ ، ٠[ثم تزايدية في الفترة]٠ ، ∞[.

بعض التحويلات الهندسية على منحنى الدالة الكسرية: *Some geometric transformation on the curve of the vational function*

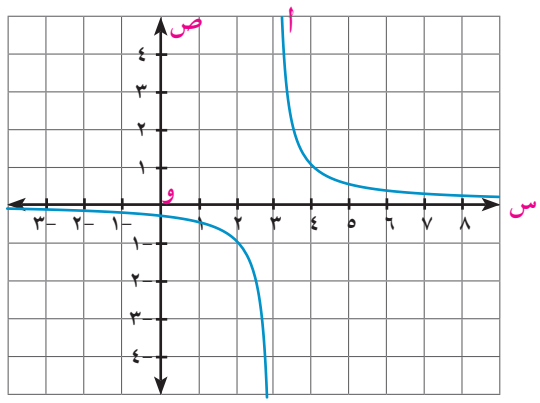
تخضع التحويلات الهندسية للدالة الكسرية لنفس الطرق المتبعة فى الدوال السابقة.

مثال

(١٠) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ حيث س ≠ ٠ لتمثيل كل من:

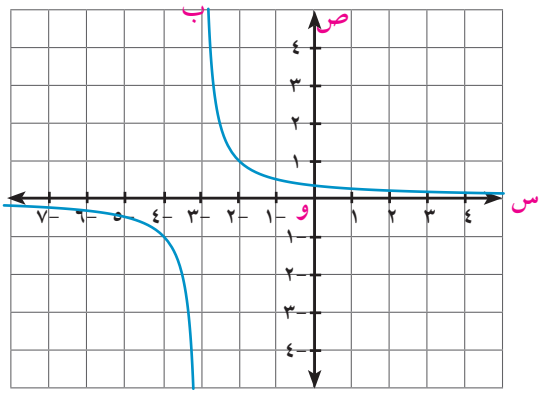
أ) د$_{١}$(س) = $\frac{١}{س - ٣}$ ب) د$_{٢}$(س) = $\frac{١}{س + ٣}$ ج) د$_{٣}$(س) = $\frac{١}{س}$ - ٢ د) د$_{٤}$(س) = $\frac{١}{س - ١}$ + ٣

الحل



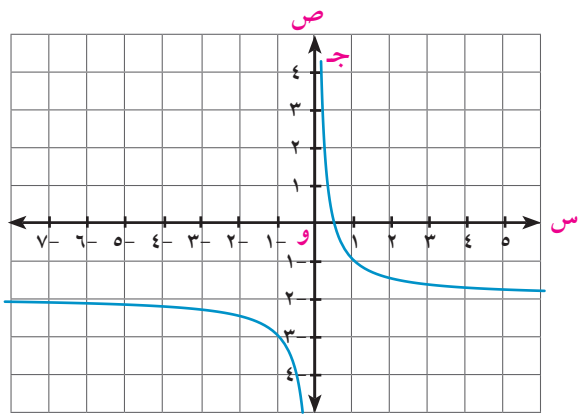
➤ منحنى الدالة د$_{١}$ هو منحنى د (س) = $\frac{١}{س}$ بإزاحة قدرها ٣ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور السينات.

➤ نقطة التماثل للدالة د$_{١}$ هى: (٣ ، ٠).



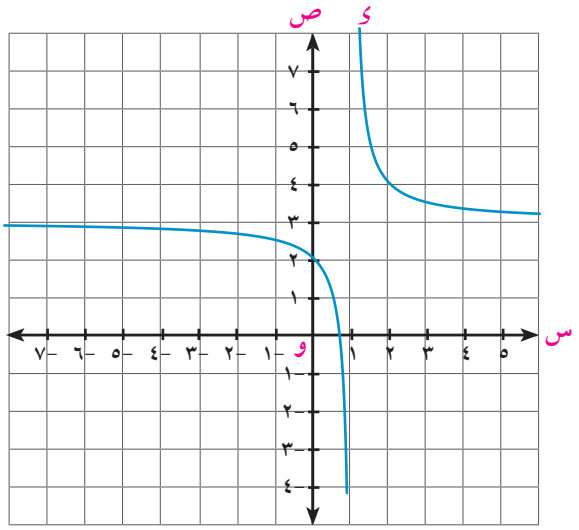
➤ منحنى الدالة د$_{٢}$ هو منحنى د (س) = $\frac{١}{س}$ بإزاحة قدرها ٣ وحدات في الاتجاه السالب لمحور السينات.

➤ نقطة التماثل للدالة د$_{٢}$ هى: (- ٣ ، ٠).



➤ منحنى الدالة د$_{٣}$ هو منحنى د (س) = $\frac{١}{س}$ بإزاحة قدرها ٢ وحدة في الاتجاه السالب لمحور الصادات.

➤ نقطة التماثل للدالة د$_{٣}$ هى: (٠ ، - ٢).



➤ منحنى الدالة د$_{٤}$ هو منحنى د (س) = $\frac{١}{س}$ بإزاحة قدرها وحدة واحدة في الاتجاه الموجب لمحور السينات، ثم إزاحة قدرها ٣ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور الصادات.

➤ نقطة التماثل للدالة د$_{٤}$ هى: (١ ، ٣).

مما سبق نستنتج أن الدالة الكسرية:

- **تكتب على الصورة:** د(س) = $\frac{ك}{س - أ}$ + ب حيث ك ≠ ٠ ، س ≠ أ
- نقطة تماثل الدالة هى (أ ، ب).

نشاط

- هل يمكنك تطبيق التحويلات الهندسية التى درستها فى الدوال الجبرية السابقة على دوال الجيب وجيب التمام؟

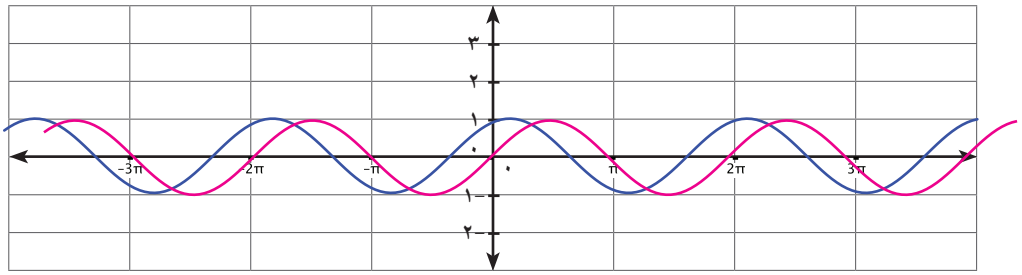
الدوال المثلثية (منحنى دالة الجيب) *Trigonometric functions*

أولا: الإزاحة في اتجاه محور السينات *First: Translation on X axis*

١- استخدم برنامج جيوجبرا (Geo Gebra) وأعد البرنامج بحيث يكون التدريج على محور السينات بالراديان، وذلك بأن تضغط بالفأرة (كليك يمين)، وتختار منها فى آخر سطر محور الفاصلات (السينات) x، ثم تختر منه نظام التدريج (π).

٢- فى أسفل البرنامج (كتابة الأوامر) اكتب الأمر: **sin (x)** ثم اضغط (**enter**) فتعطى لك شكل المنحنى الأحمر ، تستطيع التحكم فى اللون وسمك المنحنى ، وذلك بالضغط على المنحنى بالفأرة (كليك شمال)، فيظهر فى أعلى النافذة اللون وسمك الخط وشكل الخط ٠ منقط ، شرطى ، متصل ،...).

٣- بنفس الطريقة السابقة اكتب الأمر: **sin (x + (π/3))** أى: ص = جا (س + $\frac{\pi}{٣}$) ثم اضغط (**enter**) ولون هذا المنحنى بلون آخر.



٤- قارن بين المنحنيين. ماذا تلاحظ؟

نلاحظ أن منحنى دالة الجيب قد تم إزاحته أفقيًّا جهة اليسار على محور السينات بمقدار يساوى $\frac{\pi}{٣}$ ، ونلاحظ أن مدى الدالة الثانية هو [-١ ، ١] وهو نفس مدى الدالة جا س ، كما نلاحظ أن الدالة جا (س + $\frac{\pi}{٣}$) ليست زوجية وليست فردية؛ لأنه لايوجد تماثل لمنحناها حول محور الصادات أو نقطة الأصل.

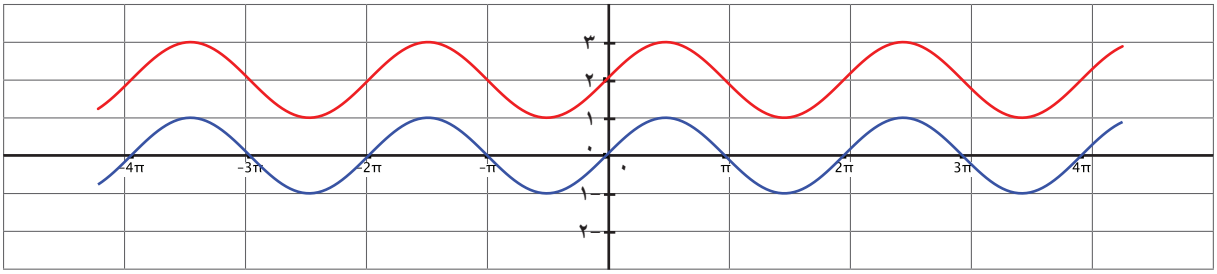
فكر:

- ماذا تتوقع أن يكون اتجاه الإزاحة السينية إذا كانت قاعدة الدالة هى: جا (س - $\frac{\pi}{٣}$).

ثانيا: الإزاحة في اتجاه محور الصادات *Second: translation on Y axis*

١ - ارسم منحنى الدالة ص = جا س كما سبق.

٢ - ارسم منحنى الدالة ص = جا س + ٢ بلون آخر **وقارن بين شكل المنحنيين. ماذا تلاحظ؟**



من الشكل البيانى نجد أن منحنى الدالة الثانية هو نفسه منحنى الدالة ص = جا(س)، ولكن تمت إزاحته بمقدار وحدتين لأعلى.

ونلاحظ أن مدى الدالة الثانية هو [١ ، ٣]؛ لأنه تم ازاحته بمقدار وحدتين في الإتجاه الموجب لمحور الصادات عن الدالة الأولى، وأن الدالة **ص = جا س + ٢** ليست زوجية وليست فردية.

تمـــارين الدرس الرابع

أولًا: تمارين على دالة الدرجة الأولى ودالة المقياس

(١) اكتب الدالة التى تمثل الخط المستقيم فى الحالات الآتية ثم مثِّله بيانيًّا:

أ ميله = $\frac{١}{٢}$ ومقطعه الصادى = ٣

ب ميله = - $\frac{١}{٣}$ ومقطعه الصادى = $\frac{٥}{٣}$

(٢) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س لتمثيل مايأتى بيانيًا:

أ $د_{١}$(س) = س + ٣

ب $د_{٢}$(س) = ٢ س – ١

ج $د_{٣}$(س) = $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{٣}{٢}$

➢ **ثم أوجد نقاط تقاطع كل منها مع محورى الإحداثيات س ، ص.**

(٣) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = ٢س لرسم منحنى الدالة ر حيث ر(س) = د(س) – ٤، ثم أوجد مساحة سطح المثلث المحدد بالخط المستقيم الممثل لهذه الدالة ومحورى الإحداثيات.

(٤) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = ٣س لرسم منحنى الدالة ر حيث ر(س) = ٦ – د(س)، ثم أوجد مساحة المثلث المحدد بالخط المستقيم الممثل لهذه الدالة ومحورى الإحداثيات.

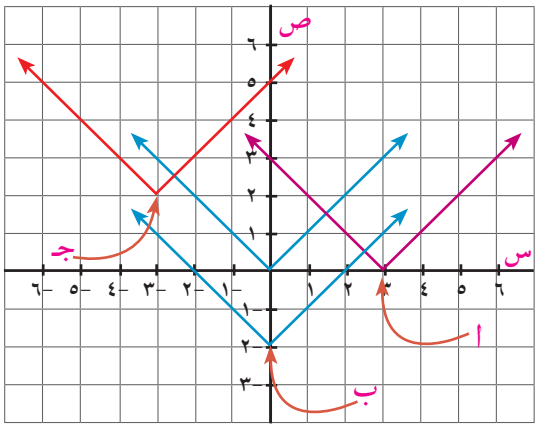
(٥) ارسم منحنى كل من الدالتين ر ، ع، حيث: ر(س) = س + ١ ، ع (س) = ٥ – س ثم أوجد من الرسم:

أ إحداثى نقطتي تقاطع كل منهما مع محور السينات.

ب إحداثيى نقطة تقاطع المنحنيين.

جـ مساحة المثلث المحدد بالمستقيمين المتقاطعين ومحور السينات.

(٦) رسم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات س ، ص كما فى الشكل المقابل.



أ اكتب قاعدة كل دالة من الدوال التى تمثلها الأشكال الآتية:

- الشكل (أ) قاعدة الدالة هى.....
- الشكل (ب) قاعدة الدالة هى.....
- الشكل (جـ) قاعدة الدالة هى.....

(٧) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل مايأتى بيانيًا:

أ $د_{١}(س) = |س + ٢|$ ب $د_{٢}(س) = |٥ - س|$ جـ $د_{٣}(س) = |س + \frac{٣}{٢}|$

د $د_{٤}(س) = |س - ٧|$ هـ $د(س) = |س| + ١$ و $د(س) = |س| - ٣$

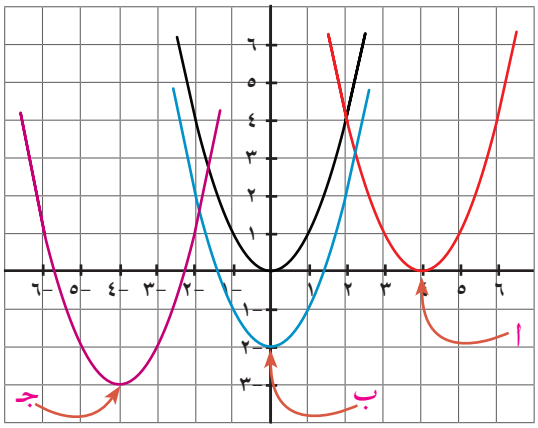
ز $د(س) = |س + ٢| + ١$ ح $د(س) = |س - ٣| - ٢$ ط $د(س) = ٢ - |س - ١|$

ص $د(س) = -|س + \frac{٥}{٢}| - \frac{٣}{٢}$

- **ثم أوجد إحداثيات نقط تقاطع المنحنيات مع المحورين.**

ثانيا: تمارين على دالة الدرجة الثانية

(٨) رسم منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^{٢}$ ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات س ، ص كما فى الشكل المقابل.



أ اكتب قاعدة كل دالة من الدوال التى تمثلها الأشكال الآتية:

- الشكل (أ) قاعدة الدالة هى.....
- الشكل (ب) قاعدة الدالة هى.....
- الشكل (جـ) قاعدة الدالة هى.....

(٩) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل ما يأتي بيانيًّا.

أ) د$_{١}$(س) = (س − ٣)^{٢} ب) د$_{٢}$(س) = (س + ١)^{٢}

جـ) د$_{٣}$(س) = س^{٢} − ٤ د) د$_{٤}$(س) = س^{٢} + ١

➤ ومن الرسم عيِّن نقطة رأس منحنى الدالة المحولة وعين مدى كل منها.

(١٠) استخدم منحنى الدالة د حيث د حيث د (س) = س^{٢} لتمثيل ما يأتي بيانيا:

أ) د$_{١}$(س) = (س − ١)^{٢} − ٢ ب) د$_{٢}$(س) = − ٢ − (س + ٣)^{٢}

جـ) د$_{٣}$(س) = (س + $\frac{٣}{٢}$)^{٢} - $\frac{١}{٢}$ د) د$_{٤}$(س) = $\frac{٣}{٤}$ - (س + $\frac{٧}{٤}$)^{٢}

➤ ومن الرسم عيِّن نقط تقاطع المنحنى مع محوري الإحداثيات.

(١١) إذا كانت د: [- ٤ ، ٤] ⟵ ح حيث د(س) = { س^{٢} + ١ عندما - ٤ ⩽ س < ٠ ; - س^{٢} - ١ عندما ٠ ⩽ س ⩽ ٤ }

➤ ارسم **منحنى الدالة د**، وأوجد مداها، وابحث إطرادها، وعيِّن نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

(١٢) ارسم الشكل البيانى لكل من الدوال المعرفة كمايلى ومن الرسم أوجد مدى كل منها.

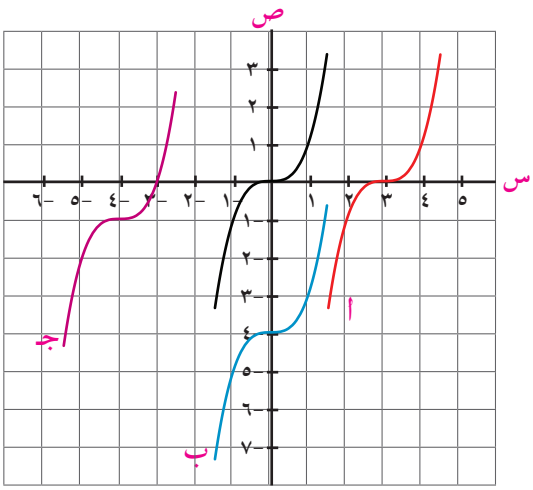
أ) د$_{١}$(س) = (س − ٢) |س| ب) د$_{٢}$(س) = س |س| - ١

جـ) د$_{٣}$(س) = { |س| عندما س < ٠ ; س^{٢} عندما س ⩽ ٠ }

د) د$_{٣}$(س) = { س^{٢} + ٢ عندما س ⩽ ٠ ; -س^{٢} - ٢ عندما س > ٠ }

ثالثا: تمارين على دالة الدرجة الثالثة

(١٣) فى الشكل المقابل: رسم منحنى الدالة د، حيث د(س) = س^{٣} ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات س ، ص



أ) اكتب قاعدة كل دالة من الدوال التى تمثلها الأشكال الآتية:

➤ الشكل (أ) قاعدة الدالة هى.....

➤ الشكل (ب) قاعدة الدالة هى.....

➤ الشكل (جـ) قاعدة الدالة هى.....

(١٤) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = س^{٣}. استخدم الشكل البيانى للدالة د لتمثيل ما يأتي بيانيا:

أ) د$_{١}$(س) = د(س + ٣)　　ب) د$_{٣}$(س) = د(س + ٢)　　ج) د$_{٣}$(س) = د(س + $\frac{٣}{٢}$)

د) د$_{٤}$(س) = د (س – ٢)　　هـ) د$_{٥}$(س) = د(س) – ٣　　و) د$_{٦}$(س) = د(س) + ١

ز) د$_{٩}$(س) = د(س – ٢) – ١　　ح) د$_{١٠}$(س) = د(س + ٣) + ٢　　ط) د$_{١١}$(س) = د(س + $\frac{٣}{٢}$) - $\frac{٥}{٢}$

ى) د$_{١٢}$(س) = ٣ – د(س - $\frac{٧}{٢}$)

(١٥) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = س^{٣}. استخدم الشكل البيانى للدالة د لتمثيل ما يأتي بيانيا:

أ) ق$_{١}$(س) = |د(س)| - ٢　　ب) ق$_{٢}$(س) = ٣ - |د(س)|　　ج) ق$_{٣}$(س) = |د(س – ٤)|

د) ق$_{٤}$(س) = |د(س + ١)|　　هـ) ق$_{٥}$(س) = |د(س – ٢)| + ٣　　و) ق$_{٦}$(س) = ٢ - |د(س + ٢)|

(١٦) ارسم الشكل البيانى لما يأتي، ومن الرسم أوجد المدى، وابحث الإطراد، وعين نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

أ) د$_{١}$(س) = $\begin{cases} س^{٣} & \text{عندما } س < -١ \\ -١ & \text{عندما } س \leq -١ \end{cases}$

ب) د$_{٢}$(س) = $\begin{cases} س^{٣} & \text{عندما } س < ٠ \\ |س| & \text{عندما } س \leq ٠ \end{cases}$

ج) د$_{٣}$(س) = |س^{٣}| + ١

د) د$_{٤}$(س) = |س^{٣} + ١|

هـ) د$_{٥}$(س) = س |س|

و) د$_{٦}$(س) = $\frac{س^{٤}}{|س|}$ - ١

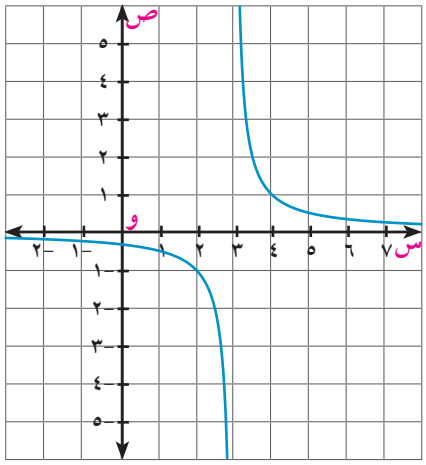
تفكير ابداعي:

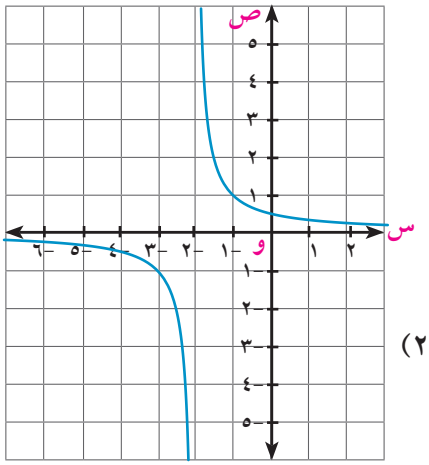
(١٧) ابحث الدالة د حيث د(س) = (|س| - ١)^{٣} من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك ، ثم ارسم منحناها ومن الرسم ابحث إطرادها، ثم أوجد قيم س التي تحقق د(س) = ٨

رابعًا: تمارين على الدالة د حيث $د(س) = \frac{١}{س}$

(١٨) رُسم منحنى الدالة د حيث $د(س) = \frac{١}{س}$، ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات س ، ص . اكتب قاعدة كل دالة التي تمثلها المنحنيات الآتية:

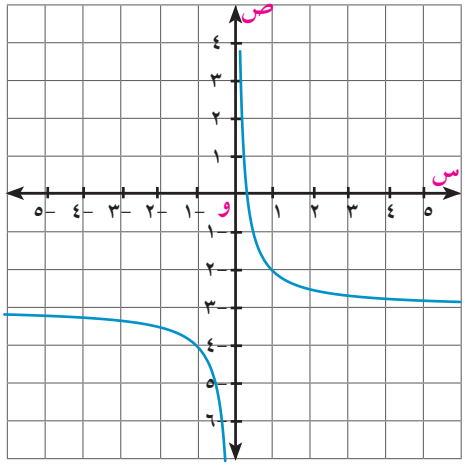
شكل (١)

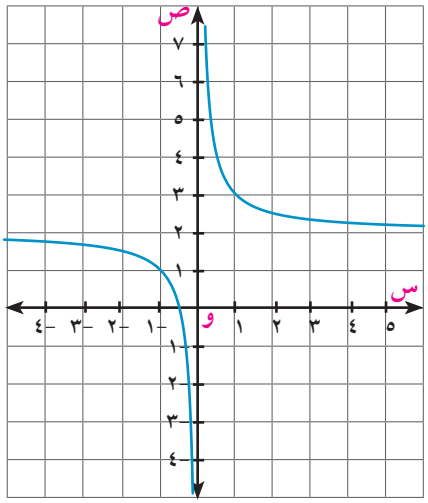




شكل (٢)

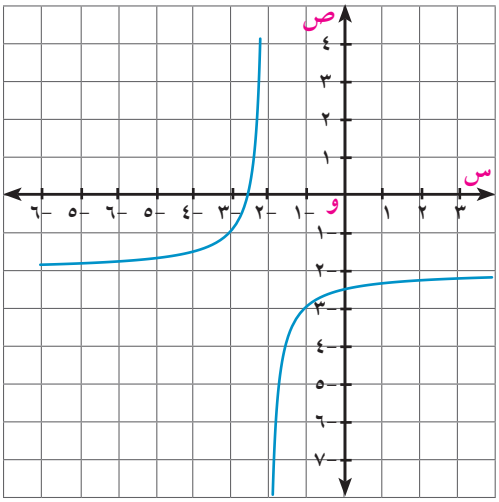
شكل (٣)

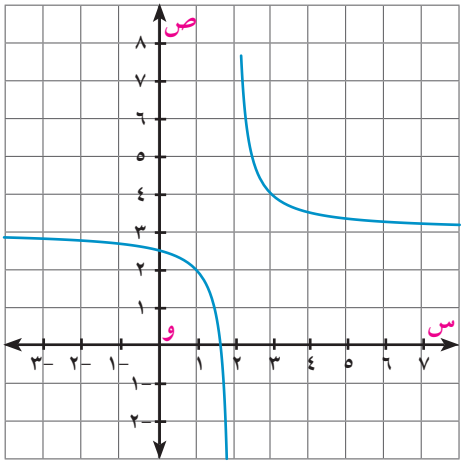




شكل (٤)

شكل (٥)





شكل (٦)

(١٩) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ فارسم الشكل البيانى للدالة ق فى الحالات الآتية، ثم أوجد إحداثيي نقطة التماثل لكل دالة:

أ ق(س) = د(س + ١)　　ب ق(س) = د(س – ٣)　　ج ق(س) = د(س) + ٢

د ق(س) = د(س) - ٤　　هـ ق(س) = د(س + ٢) - ٥　　و ق(س) = د(س - ٢) + ٢

(٢٠) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$، فارسم الشكل البيانى للدالة ل فى الحالات الآتية:

أ ل(س) = |د(س)|　　ب ل(س) = ٢ + |د(س)|　　ج ل(س) = |د(س - ٢)|

د ل(س) = ٢ – |د(س + ١)|

(٢١) ارسم الشكل البيانى لما يأتي، ومن الرسم أوجد إحداثيى نقطة التماثل، وابحث إطراد الدالة كذلك نوعها، من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

أ $د_{١}(س) = \frac{١}{|س|}$　　ب $د_{٣}(س) = \frac{١}{|س - ٣|}$　　ج $د_{٤}(س) = \frac{١}{|س|} - ٢$

د $د_{٥}(س) = \frac{١}{|س + ١|} - ٢$　　هـ $د_{٦}(س) = \frac{١}{|س - ٢|} + ٣$

تفكير إبداعي:

(٢٢) ارسم الشكل البياني لما يأتي، ومن الرسم عيِّن المدى واطراد الدالة ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

أ $د_{١}(س) = \frac{|س|}{س^{٢}}$　　ب $د_{٢}(س) = \frac{|س| - ١}{س - ١}$　　ج $د_{٣}(س) = \frac{٢س + ١}{س + ١}$

د $د_{٤}(س) = س|س - ١|$　　هـ $د_{٥}(س) = \frac{|س - ١|}{س}$　　و $د_{٦}(س) = \frac{٢س + ١}{|س|}$

الدرس ٥

المعادلات والمتباينات
Equations and inequalities

سوف تتعلم
- حل معادلات المقياس بيانيًّا
- حل معادلات المقياس جبريًّا
- حل متباينات المقياس جبريًّا

المصطلحات الأساسية
- معادلة. *Equation*
- متباينة. *Inequality*
- حل بياني. *Graphical solution*

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة رسومية
- ورق رسم بياني
- برامج رسومية للحاسوب.

فكر و ناقش

أولًا: حل المعادلات

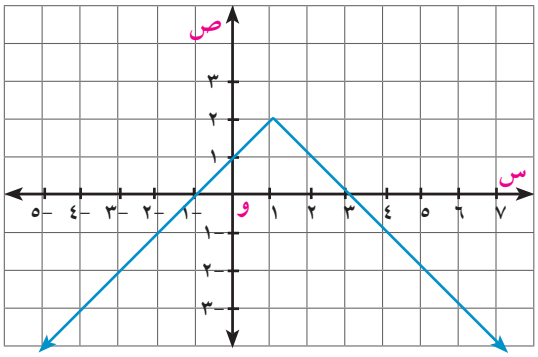
سبق أن درست حل المعادلات الجبرية من الدرجة الأولى ومن الدرجة الثانية فى متغير واحد وفى متغيرين جبريًّا وبيانيًّا، فهل يمكنك حل المعادلة الآتية:

إذا كانت د معرفة كالآتى:

$$د(س) = \begin{cases} ٣ - س & \text{عندما } س < ١ \\ ١ + س & \text{عندما } س \geq ١ \end{cases}$$

فأوجد قيم س التى تجعل د(س) = ٠

الشكل البيانى المرسوم يمثل شعاعين يمر أحدهما بالنقطة (- ١ ، ٠)والآخر يمر بالنقطة (٣ ، ٠).



ومن الشكل المرسوم عندما د(س) = ٠ فإن:

س = - ١ أ، س = ٣

ويمكن التحقق من ذلك جبريًّا كالآتى:

عندما: س < ١ فإن: ٣ – س = ٠ أى أن س = ٣

تحقق الفترة المعطاة لأن ٣ ∋]١ ، ∞ |

عندما: س ⩾ ١ فإن: ١ + س = ٠ أي أن س = - ١

تحقق الفترة المعطاة؛ لأن -١ ∋] - ∞ ، ١ [

أى أن مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠

هى: { - ١ ، ٣ }

تذكر أن

الحل البياني للمعادلة د(س) = ق(س) هو مجموعة تحوى الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنى الدالتين د، ق.

حل المعادلة: | أ س – ب| = جـ

مثال

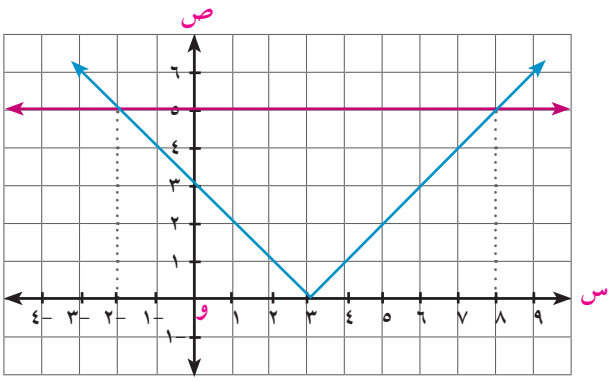
(١) حل المعادلة:

أ |س - ٣| = ٥ بيانيًّا وجبريا.

الحل

بوضع: د(س) = |س - ٣| ، ر(س) = ٥

د(س) = { س - ٣ عندما س ⩾ ٣ ، - س + ٣ عندما س < ٣ }



ر(س) = ٥ تمثل دالة ثابتة تمثل بمستقيم يوازى محور السينات، ويمر بالنقطة (٠ ، ٥) نرسم الدالتين د ، ر فى شكل واحد حيث إن:

د(س) = ر(س).

نعين نقاط التقاطع منحنيي الدالتين د ، ر فتكون الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع هى مجموعة الحل؛ أى أن مجموعة حل المعادلة هى: {- ٢ ، ٨}

الحل الجبرى:

عندما س < ٣ : س - ٣ = ٥ أى أن: س = ٨ ∉]-∞ ، ٣[

عندما س ⩾ ٣ : - س + ٣ = ٥ أى أن: س = -٢ ∈ [٣ ، ∞ - [

مجموعة حل المعادلة هى: {- ٢ ، ٨} وهذا يطابق الحل البيانى.

حاول أن تحل

(١) حل كلًّا من المعادلات الآتية بيانيًّا وجبريًّا.

أ |س| - ٤ = ٠ ب |س| + ١ = ٠ جـ |٢س - ٧| = ٥

حل المعادلة |أ س + ب| = جـ س + ء

مثال

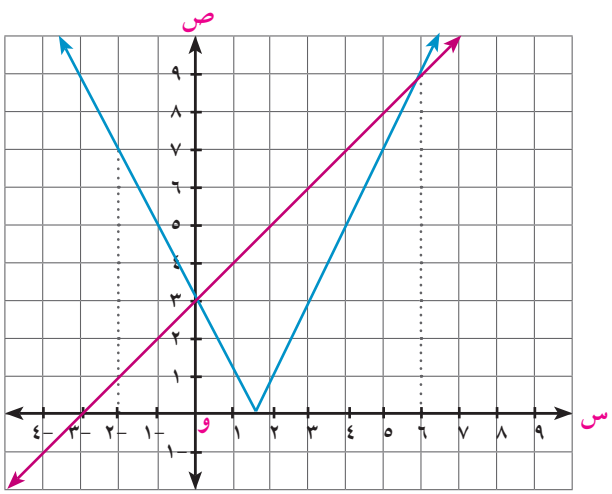
(٢) حل المعادلة: |٢س - ٣| = س + ٣ بيانيًّا وجبريا.

الحل

الحل البيانى:

د: د(س) = |٢س - ٣| يمثلها شعاعان مبدؤهما النقطة $\left(\frac{٣}{٢} ، ٠\right)$ وأحدهما يمر (٠ ، ٣) والآخر يمر بالنقطة (٦، ٩).

ر: ر(س) = س + ٣ وهذه دالة خطية يمثلها مستقيم يمر بالنقطتين (٠ ، ٣) ، (٦، ٩) من الشكل المقابل تكون الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيي الدالتين د ، ر هى مجموعة حل المعادلة أى أن مجموعة حل المعادلة هى: {٠ ، ٦}



الحل الجبرى:

عندما س $\leqslant \frac{٣}{٢}$ تكون ٢س − ٣ = س + ٣ ومنها س = ٦ $\ni$ $[\frac{٣}{٢}، \infty[$

عندما س $\geqslant \frac{٣}{٢}$ تكون − ٢س + ٣ = س + ٣ ومنها س = ٠ $\ni$ $]-\infty، \frac{٣}{٢}]$

مجموعة حل المعادلة هى: {٠ ، ٦}.

حاول أن تحل

(٢) حل كلًّا من المعادلات الآتية بيانيًّا وجبريًّا.

أ |٢س + ٤| = ١ − س

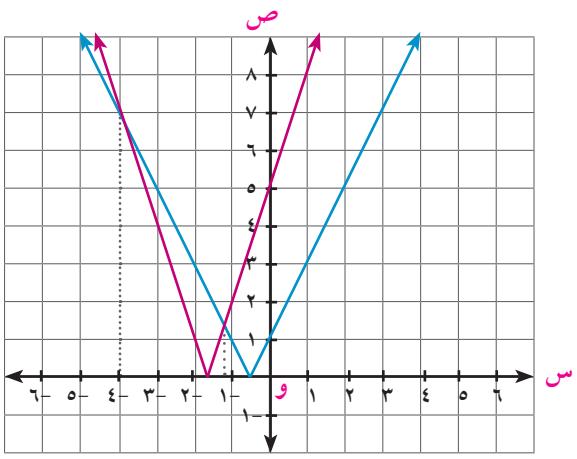
ب |٢س + ٥| = س − ٤

حل المعادلة: $|أ س + ب| = |جـ س + ء|$

مثال

(٣) |٣س + ٥| = |٢س + ١| بيانيًّا.

الحل



نرسم الشكل البيانى للدالة د حيث

د(س) = |٣س + ٥| وهذه يمثلها شعاعان مبدؤهما النقطة $(-\frac{٥}{٣}، ٠)$، وأحدهما يمر بالنقطة (٠ ، ٥) والآخر يمر بالنقطة (- ٤ ، ٧).

نرسم الشكل البيانى للدالة ر حيث

ر(س) = |٢س + ١| وهذه يمثلها شعاعان مبدؤهما النقطة $(-\frac{١}{٢}، ٠)$ ويمر أحدهما بالنقطة (٢ ، ٥) والاخر يمر بالنقطة (- ٤ ، ٧)

نعين نقط تقاطع منحنيي الدالتين د ، ر فتكون الإحداثيات السينية لنقط التقاطع هى مجموعة الحل.

من الرسم نجد أن نقط تقاطع المنحنيين هما (- ١,٢ ، ١,٤) ، (- ٤ ، ٧)

لذلك فإن مجموعة الحل هى {- ١,٢ ، - ٤}.

حاول أن تحل

(٣) حل كلًّا من المعادلات الآتية بيانيًّا.

أ |٣س + ٧| = |٢س + ٣|

ب |س − ٢| + |س − ١| = ٣

بعض خواص مقياس العدد *Properties of the absolute value*

تعلم

علمت أن مقياس العدد الحقيقى س يُرمز له بالرمز |س|، وهو عدد حقيقى يساوى س إذا كانت س غير سالبة، ويساوى (− س) إذا كانت س سالبة، وفيما يلى بعض خصائص المقياس.

١) $|أ| \geq ٠$ أى أن مقياس العدد الحقيقى هو عدد حقيقى غير سالب.

ونلاحظ أن: $|أ| = ٠$ إذا وفقط إذا كان $أ = ٠$

٢) $|أ ب| = |أ| \times |ب|$ فمثلا:

$|٢ \times -٣| = |-٦| = ٦$ ، $|٢| \times |-٣| = ٢ \times ٣ = ٦$

٣) $|أ + ب| \leq |أ| + |ب|$

و يحدث التساوى فقط إذا كان العددان **أ ، ب** لهما نفس الإشاره فمثلًا:

$|٤ + ٥| = |٤| + |٥| = ٩$ ،

$|-٤ - ٥| = |-٤| + |-٥| = ٩$

تفكير ناقد:

اكتب علاقة التباين المناسبة بين $|أ - ب|$ ، $||أ| - |ب||$ مع إعطاء أمثلة عددية بسيطة توضح هذه العلاقة.

مثال

٤ أوجد جبريًا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

أ $|٢س + ٣| = ٧$

ب $|٢س - ٣| + ٣س + ١ = ٠$

جـ $|س + ٧| = |س - ٥|$

د $\sqrt{س^٢ + ٦س + ٩} = ٩ - ٢س$

الحل

أ $\because |٢س + ٣| = ٧$

$\therefore ٢س + ٣ = ٧$ أو $٢س + ٣ = -٧$

$٢س = ٤$ أو $٢س = -١٠$

$س = ٢$ أو $س = -٥$

$\therefore ٢س + ٣ = \pm ٧$

مجموعة الحل هى $\{٢ ، -٥\}$

لاحظ أن

إذا كان $|س| = أ$ حيث $أ > ٠$

فإن: $س = \pm أ$

فكر:

١- هل توجد طرق جبرية أخرى لحل المعادلة ؟ استخدم إحدى هذه الطرق فى الحل.

ب $\because |٢س - ٣| + ٣س + ١ = ٠$

$\therefore |٢س - ٣| = -(٣س + ١)$

بتربيع الطرفين: $٤س^٢ - ١٢س + ٩ = ٩س^٢ + ٦س + ١$

بالتبسيط: $٥س^٢ + ١٨س - ٨ = ٠$

بتحليل المقدار الثلاثى: $(٥س - ٢)(س + ٤) = ٠$

إيجاد قيم س: $س = \frac{٢}{٥}$ أ ، $س = -٤$

بالتحقيق عن قيم س الناتجة:

أولا: عندما $س = \frac{٢}{٥}$

الطرف الأيمن $= |٢ \times \frac{٢}{٥} - ٣| + ٣ \times \frac{٢}{٥} + ١ \neq$ الطرف الأيسر

لذلك فإن: $س = \frac{٢}{٥}$ مرفوض؛ لأنه لا يحقق المعادلة

أضف إلى معلوماتك

عند استخدام طريقة تربيع طرفي المعادلة، يعتبر التحقيق عن قيم س الناتجة شرط ضروري لإيجاد مجموعة الحل.

ثانيا: عندما س = - ٤

الطرف الأيمن = |٢(- ٤) - ٣| + ٣ (- ٤) + ١ = الطرف الأيسر

س = - ٤ حل للمعادلة أى أن مجموعة حل المعادلة هو { – ٤}

فكر:

١ - هل يمكنك استخدام طريقة إعادة تعريف الدالة لحل المعادلة السابقة ؟ كيف ذلك.

جـ ∵ |س + ٧| = |س – ٥|

∴ س + ٧ = ± (س – ٥)

∴ س + ٧ = س – ٥ ولكن ٧ ≠ - ٥ (الحل مرفوض).

أو س + ٧ = - س + ٥ أى أن: ٢س = - ٢

∴ س = - ١ أى أن مجموعة حل المعادلة هو {-١}

لاحظ أن

إذا كان أ ، ب ∈ ح

وكان |أ| = |ب|

فإن: أ = ± ب

التحقيق:

بالتعويض عن س = - ١ فى طرفى المعادلة نجد أن:

الطرف الأيمن = الطرف الأيسر = ٦ أى أن مجموعة الحل هو { - ١}

فكر:

١ - أوجد حل المعادلة السابقة باستحدام طريقة تربيع طرفيها، ثم تحقق من صحة الحل.

د ∵ $\sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩}$ = ٩ – ٢س

∴ $\sqrt{(س - ٣)^{٢}}$ = ٩ – ٢س

∴ |س - ٣| = ٩ – ٢س

أولا: عندما س < ٣ فإن: س – ٣ = ٩ – ٢س

∴ ٣س = ١٢ أى أن: س = ٤ ∋]٣ ، ∞ [

ثانيا: عندما س > ٣ فإن: س – ٣ = - ٩ + ٢س

∴ س = ٦ أى أن: س = ٦ ∉] - ∞ ، ٣ [

∴ مجموعة الحل هى {٤}

لاحظ أن

لأي عدد حقيقي أ يكون:

$\sqrt{أ^{٢}}$ = |أ|

فكر:

١ - هل يمكنك استخدام طرق جبرية أخرى لإيجاد حلٍّ للمعادلة ؟ وضح ذلك.

حاول أن تحل

(٤) أوجد جبريًّا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

أ ٢|س + ١| - ٥ = ٠ ب ٢|س + ٥| = ٤ + س

جـ ٣|س - ١| - ٢ |٢ - س| = ٠ د $\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}$ = ٤

ثانيا: حل المتباينات *Solving the inequalities*

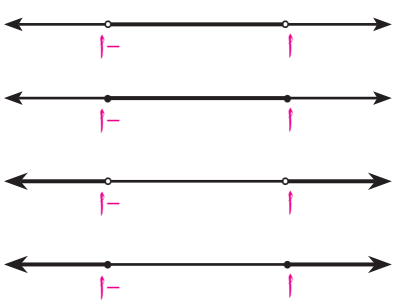
سبق أن درست المتباينات، وعلمت أن المتباينة هى عبارة رياضية تحتوي أحد الرموز: (< أ ، > أ ، ⩽ أ ، ⩾ أ) والمقصود بحل المتباينة هو إيجاد القيمة أو مجموعة القيم للمتغير التى تجعل المتباينة صحيحة.

خواص التباين

تعلم

١- إذا كان أ > ٠ فإن:

- إذا كان |س| < أ فإن: - أ < س < أ
- إذا كان |س| ⩽ أ فإن: - أ ⩽ س ⩽ أ
- إذا كان |س| > أ فإن: س > أ، س < - أ
- إذا كان |س| ⩾ أ فإن: س ⩾ أ، س ⩽ - أ



تذكر أن

لكل من أ ، ب ، جـ

إذا كان: أ > ب ، ب > جـ فإن أ > جـ

إذا كان: أ > ب فإن أ + جـ > ب + جـ

إذا كان أ > ب **فإن:**

أ جـ > ب جـ عندما تكون جـ > ٠

أ جـ < ب جـ عندما تكون جـ < ٠

إذا كان أ ، ب موجبتان ، أ > ب فإن $\frac{١}{أ} < \frac{١}{ب}$

مثال

٥ أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

أ |س| > ٢ ب |س| ⩾ $\sqrt{٣}$

جـ |س| < ٥ د |س| ⩽ $\frac{٣}{٢}$

الحل

أ ∵ |س| > ٢ ∴ - ٢ > س > ٢ أى: س ∈] - ٢ ، ٢ [

ب ∵ |س| ⩾ $\sqrt{٣}$ ∴ - $\sqrt{٣}$ ⩾ س ⩾ $\sqrt{٣}$ أى: س ∈ [- $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}$]

جـ ∵ |س| < ٥ ∴ س < ٥ أ ، س > - ٥ أى: س ∈ ح - [- ٥ ، ٥]

د ∵ |س| ⩽ $\frac{٣}{٢}$ ∴ س ⩽ $\frac{٣}{٢}$ أ ، س ⩾ - $\frac{٣}{٢}$ أى: س ∈ ح - [- $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$]

حاول أن تحل

٥ أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

أ |س| > $\frac{١}{٢}$ ب | $\frac{س}{٢}$ | ⩾ $\frac{٥}{٢}$ جـ |س| < $\sqrt{٧}$ د |$\frac{١}{٣}$ س| ⩽ ٢

تفكير ناقد:

إذا كانت أ < ٠ ، ب > ٠ اكتب مجموعة حل كل من المتباينات الآتية (مستخدمًا خواص التباين).

أ |س - ب| > أ ب |س - ب| ⩾ أ جـ |س - ب| < أ د |س - ب| ⩽ أ

مثال

(٦) أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

أ $|س - ٣| > ٤$ ب $\sqrt{س^٢ - ٢س + ١} \leqslant ٤$ ج $\frac{١}{|٢س - ٣|} \leqslant ٢$

الحل

أ ∵ $|س - ٣| > ٤$ أى $- ٤ > س - ٣ > ٤$ وبإضافة ٣ إلى المتباينة

∴ $- ٤ + ٣ > س - ٣ + ٣ > ٤ + ٣$ وبالتبسيط

∴ $- ١ > س > ٧$ أى أن $س \in]- ١ ، ٧[$

∴ مجموعة الحل $=]- ١ ، ٧[$

ب ∵ $\sqrt{(س - ١)^٢} = |س - ١|$ أى أن: $|س - ١| \leqslant ٤$

∴ $س - ١ \leqslant ٤$ أى $س \leqslant ٥$ أ، $س - ١ \geqslant - ٤$ أى $س \geqslant - ٣$

$س \in ح -]- ٣ ، ٥[$

∴ مجموعة حل المتباينة هى $]- \infty ، - ٣] \cup [٥ ، \infty[$

ج ∵ $\frac{١}{|٢س - ٣|} \leqslant ٢$ وبأخذ المعكوس الضربى للطرفين

∴ $|٢س - ٣| \geqslant \frac{١}{٢}$ ، $س \neq \frac{٣}{٢}$

∴ $- \frac{١}{٢} \geqslant ٢س - ٣ \geqslant \frac{١}{٢}$ وبإضافة ٣ إلى المتباينة

∴ $- \frac{١}{٢} + ٣ \geqslant ٢س - ٣ + ٣ \geqslant \frac{١}{٢} + ٣$

∴ $\frac{٥}{٢} \geqslant ٢س \geqslant \frac{٧}{٢}$ وبالقسمة على ٢

∴ $\frac{٥}{٤} \geqslant س \geqslant \frac{٧}{٤}$

أى أن مجموعةالحل هى $[\frac{٥}{٤} ، \frac{٧}{٤}] - \{\frac{٣}{٢}\}$

حاول أن تحل

(٦) أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

أ $|س - ٧| > ١١$ ب $|٣س + ٧| \geqslant ٨$

ج $\sqrt{س^٢ - ٦س + ٩} \leqslant ٨$ د $\frac{١}{|٣س|} \leqslant ٥$

تمـــاريـن الدرس الخامس

أكمل مايأتى:

(١) مجموعة حل المعادلة |س| = $\frac{١}{٢}$ هى

(٢) مجموعة حل المعادلة |س| + ٣ = ٠ هى

(٣) مجموعة حل المتباينة |س – ٢| ≥ ٠ هى

أوجد جبريًّا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

(٤) |س - ٢| = ٣

(٥) |٣ - ٢ س| = ٧

(٦) |س + ٢| = ٣ س - ١٠

(٧) |س + ٢| + س - ٢ = ٠

(٨) س^{٢} + |س| = ٢

(٩) س |س - ٢| + ٣ = ٠

(١٠) |س – ٢| = ٣ س - ٤

(١١) |س – ١| = س - ٢

(١٢) $\sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩}$ + ٢س = ٩

(١٣) س |س| - ٥ |س| + ٦ = ٠

(١٤) |س - ٢|^{٢} – |س - ٢| = ٠

(١٥) |٢س - ٦| = (س - ٣)^{٢}

أوجد بيانيًّا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

(١٦) |٢ س – ٣| = ٧

(١٧) |س + ٢| + س - ٢ = ٠

(١٨) |س – ٢| = ٣ س - ٤

(١٩) |٢ س - ٤| = |س + ١|

(٢٠) |س| + س = ٠

(٢١) |س + ٢| = |س - ٣|

(٢٢) |س - ٢| + |س + ١| = ٣

(٢٣) |س - ٣| = ٣ - س

أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية:

(٢٤) |س – ١| > ٢

(٢٥) |س - ٢| > ٣

(٢٦) |٢ س – ٥| < ٣

(٢٧) |٢ س - ٣| < ٧

(٢٨) |٢ س + ٣| ≥ ٧

(٢٩) |٢ س - ٥| < ١

(٣٠) |٢ س - ٣| ≥ ١٥

(٣١) |٣ س - ٢| > ٤

(٣٢) |٣ س - ٧| ≤ ٢

(٣٣) |٣س + ٢| + ٥ > ٤

(٣٤) $\sqrt{س^{٢} - ٢س + ١}$ ≤ ٤

(٣٥) $\sqrt{٤س^{٢} - ١٢س + ٩}$ ≥ ٩

(٣٦) |٢س - ٣| + |٦ – ٤س| > ١٢

(٣٧) $\frac{١}{|٢س - ٥|}$ ≤ ٣

(٣٨) $\frac{١}{|٢س - ٣|}$ < ٢

تفكير ابداعى:

أوجد مجموعة قيم س التى تحقق :

(٣٩) |س – ٣| + |س – ١| = ٨

(٤٠) |٣ س - ١٠| < |س + ٢|

(٤١) $\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}$ + |٦ – ٣ س| > ٠

(٤٢) (|٢ س – ٣| - ٥) (|٢ س – ٣| + ٥) < ٠

ملخص الوحدة

١ **الدالة:** هى علاقة بين مجموعتين غير خاليتين سـ ، صـ بحيث يكون لكل عنصر من عناصر المجموعة سـ صورة واحدة فقط من عناصر صـ ، وتكتب رمزيًّا بالصورة د: سـ ⟵ صـ، وتتحدد الدالة بثلاثة عناصر هى: المجال، المجال المقابل، وقاعدة الدالة.

٢ **اختبار الخط الرأسى:** إذا مثلت علاقة بمجموعة من النقاط فى مستوى احداثى متعامد وقطع الخط الرأسى عند كل عنصر من عناصر المجال تمثيلهما البيانى فى نقطة واحدة فقط فإن هذه العلاقة تمثل دالة.

٣ **الدالة الزوجية والدالة الفردية:**

الدالة الزوجية: يقال للدالة د أنها زوجية إذا كان د(-س) = د(س) لكل س ، -س ∈ المجال.

الدالة الفردية: يقال للدالة د أنها فرديةإذا كان د(-س) = -د(س) لكل س ، -س ∈ المجال.

٤ **إطراد الدوال:** تكون الدالة تزايدية فى الفترة]أ ، ب[إذا كان لكل س$_١$ ، س$_٢$ ∈]أ ، ب[، س$_٢$ > س$_١$ فإن د(س$_٢$) > د(س$_١$) :

وتكون الدالة تناقصية فى الفترة]أ ، ب[إذا كان لكل س$_١$ ، س$_٢$ ∈]أ ، ب[، س$_٢$ > س$_١$ فإن د(س$_٢$) < د(س$_١$)

وتكون **الدالة ثابتة** فى الفترة]أ ، ب[إذا كان لكل س$_١$، س$_٢$ ∈]أ ، ب[، س$_٢$ > س$_١$ فإن د(س$_٢$) - د(س$_١$)

٥ **الدالة الأحادية:** الدالة د: سـ ⟵ صـ تسمى دالة أحادية إذا كان:

لكل أ ، ب ∈ سـ و د(أ) = د(ب) فإن أ = ب أو لكل أ ≠ ب فإن د(أ) ≠ د(ب)

ويتحقق عن ذلك بيانيًّا بالخط الأفقى الذي لا يمر بأكثر من نقطة واحدة من بيان الدالة.

٦ **الدالة الخطية:** هى دالة تكتب بالصورة: د(س) = أ س + ب
حيث أ هو ميل الخط المستقيم، ب الجزء المقطوع من محور الصادات.

٧ **دالة المقياس:**
أبسط صورة لدالة المقياس هى د(س) = |س|، وتعرف على النحو التالى: د(س) = { س ، س ⩾ ٠ ; -س ، س < ٠ }

ندرس دالة المقياس التى على الصورة: د(س) = ك |س- أ| + ب حيث ك ≠ ± ١ ومن خواصها:

نقطة رأس المنحنى هى (أ ، ب).

معادلة محور التماثل هى س = أ

٨ **الدالة التربيعية:** ندرس الدالة التربيعية التى على الصورة: د(س) = ك (س - أ)^{٢} + ب حيث ك ≠ ± ١

- نقطة رأس المنحنى هى (أ ، ب).
- نقطة رأس المنحنى في الدالة التربيعية التي على الصورة د(س) = أس^{٢} + ب س + جـ ،

 أ ≠ ٠ هي $(\frac{-ب}{٢أ}$ ، د $(\frac{-ب}{٢أ}))$
- معادلة محور التماثل هى: س = أ
- أبسط صورة للدالة التربيعية هى د(س) = س^{٢} ويمكن إزاحة منحنى الدالة إزاحة أفقية فقط، أو إزاحة رأسية فقط أو إزاحة أفقية ورأسية معًا.

٩ **الدالة التكعيبية:** ندرس الدالة التكعيبية التى على الصورة: د(س) = ك (س - أ)^{٣} + ب حيث ك ≠ ± ١

- نقطة التماثل هى (أ ، ب).
- أبسط صورة للدالة التكعيبية هى د(س) = س^{٣}، ويمكن إزاحة منحنى الدالة إزاحة أفقية فقط، أو إزاحة رأسية فقط، أو إزاحة أفقية ورأسية معًا.

١٠ **الدالة الكسرية:** ندرس الدالة على الصورة: د(س) = $\frac{ك}{س-أ}$ + ب ، ك ≠ ± ١

نقطة تماثل الدالة هى (أ ، ب).

- أبسط صورة للدالة هى د(س) = $\frac{١}{س}$ ، ويمكن إزاحة منحنى الدالة إزاحة أفقية فقط، أو إزاحة رأسية فقط، أو إزاحة أفقية ورأسية معًا.

١١ **التحويلات الهندسية** للدالة د، حيث ص = د(س) تحدد بالآتي :

- إذا كانت ص = د(س) + أ فإنها تمثل بإزاحة منحنى د في الاتجاه الموجب لمحور الصادات بمقدار أ.
- إذا كانت ص = د (س) - أ فإنها تمثل بإزاحة منحنى د في الاتجاه السالب لمحور الصادات بمقدار أ.
- إذا كانت ص = د(س + أ) فإنها تمثل بإزاحة منحنى د في الاتجاه السالب لمحور السينات بمقدار أ.
- اذا كانت ص = د (س - أ) فإنها تمثل بإزاحة منحنى د في الاتجاه الموجب لمحور السينات بمقدار أ.

١٢ **المعادلة:** هي جملة رياضية تحتوي على عبارتين جبريتين، يفصل بينهما بالإشارة (=)، وعادة ما تحتوي المعادلة على مجهول أو أكثر.

طرق حل معادلات المقياس:

- الحل البياني.
- الحل الجبري (إعادة تعريف دالة المقياس - أو تربيع طرفي المعادلة).

١٣ المتباينة: هي عبارة رياضية تحتوي أحد الرموز (< ، > ، ⩽ ، ⩾) وحل المتباينة يعني إيجاد مجموعة قيم المتغير التي تجعل المتباينة صحيحة.

إذا كان أ > ٠ فإن:

- إذا كان |س| < أ فإن: - أ < س < أ



- إذا كان |س| ⩽ أ فإن: - أ ⩽ س ⩽ أ



- إذا كان |س| > أ فإن: س > أ، س < - أ



- إذا كان |س| ⩾ أ فإن: س ⩾ أ، س ⩽ - أ

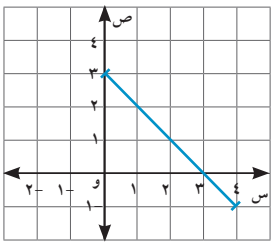


تمـــارين عامة

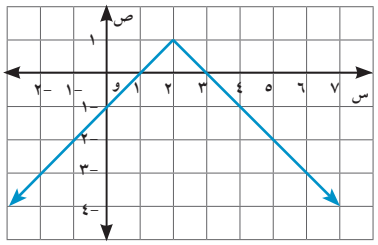
١ فى الأشكال البيانية الآتية :

أولًا: عين مدى الدالة **ثانيًا:** حدد الدوال الأحادية **ثالثًا:** ادرس إطراد كل دالة.

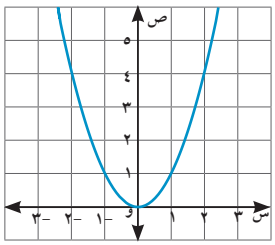
أ



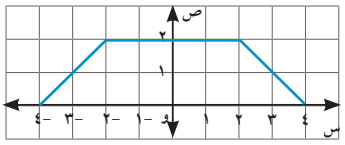
ب



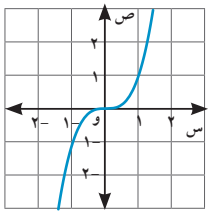
جـ



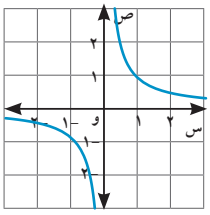
د



هـ



و



٢ أوجد مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية

أ $د_١(س) = ٢س^٣ + س + ٣$

ب $د_٢(س) = \frac{٢س}{س^٢ - ٢س - ٣}$

جـ $د_٣(س) = \frac{س^٢ - ١}{س^٢ + ١}$

د $د_٤(س) = \sqrt{٨ - س} - ٣$

هـ $د_٥(س) = \frac{٣}{\sqrt{٨ + س} + ٢}$

و $د_٦(س) = \frac{١}{\sqrt{٨ + ٤س - س^٢} + ٤}$

٣ استخدم منحنى الدالة د حيث ص = د(س) لتمثيل مايأتى بيانيًا:

أ $د_١(س) = ٤ + س$

ب $د_٢(س) = س - ١$

جـ $د_٣(س) = س + \frac{٣}{٢}$

ثم أثبت أن كل دالة من هذه الدوال دالة أحادية وابحث إطراد كل منها.

٤ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل كل مما يأتي:

أ $د_١(س) = |س - ١|$

ب $د_٢(س) = ٢ - |س|$

جـ $د_٣(س) = |س + ٢| - ٣$

ثم ابحث إطراد كل منها.

(٥) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل مايأتى بيانيًا:

أ د$_{١}$(س) = س^{٢} − ٣ ب د$_{٢}$(س) = −٢− س^{٢} ج د$_{٣}$(س) = (س − ٢)^{٢} + ١

ثم أوجد معادلة محور التماثل لكل منها.

(٦) استخدم منحنى الدالة د، حيث د(س) = س^{٣} لتمثيل مايلي بيانيا:

أ د$_{١}$(س) = (س + ٣)^{٣} ب د$_{٢}$(س) = - (س − ١)^{٣} ج د$_{٣}$(س) = س^{٣} − ١

د د$_{٥}$(س) = (س + ١)^{٣} − ٢

(٧) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ لتمثيل مما يلي بيانيا:

أ د$_{١}$(س) = $\frac{١}{س + ١}$ ب د$_{٢}$(س) = $\frac{-١٠}{س + ٢}$ ج د$_{٣}$(س) = $\frac{١}{س}$ + ٢

د د$_{٤}$(س) = ١ - $\frac{١}{س}$ هـ د$_{٥}$(س) = $\frac{س + ١}{س}$ و د$_{٦}$(س) = $\frac{٣س - ٥}{س - ٢}$

(٨) أوجد مجموعة حل المعادلات والمتباينات الآتية:

أ |٢س - ١| - ٣ = ٠ ب |٣س - ٢| + ٢س − ٣ = ٠ ج |س + ٢| = |س - ٣|

د س^{٢} − ٣|س| - ١٠ = ٠ هـ س|س| - ٥|س| + ٦ = ٠ و |س + ٣| > ١

ز |٣س - ٧| ≥ ٥ ح |٣س - ٢| ≤ ٦ ط $\sqrt{٤س^{٢} - ١٢س + ٩}$ > ٥

(٩) الربط بالهندسة: قطعة من الورق المقوى على شكل مستطيل بُعداه ٢٠ سم، ٣٠ سم، يراد صنع علبة منه بدون غطاء، وذلك بقص أربعة مربعات حول رؤوسه الأربعة، طول ضلع كل منها س، ثم ثنيت الأجزاء المتبقية بزاوية قائمة إلى نفس الجهة.

أ أوجد حجم العلبة بدلالة س. ب اكتب درجة دالة كثيرة الحدود الناتجة.

ج اكتب مجال تغير الجزء المقطوع من الأركان س.

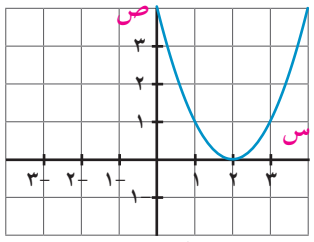
تفكير ابداعي:

(١٠) ارسم فى شكل واحد الدالتين د ، ر حيث د(س) = س^{٢}|س| ، ر(س) = ٢ - |س| ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة د(س) = ر(س)

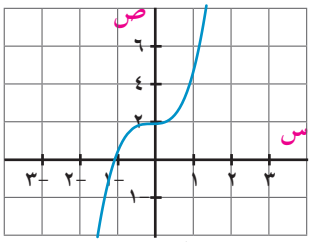
(١١) أثبت أن الدالة د حيث د(س) = $\frac{١٢}{|س| + ٢}$ زوجية، ثم أوجد جبريًّا مجموعة حل المعادلة د(س) = ٢

اختبار تراكمى

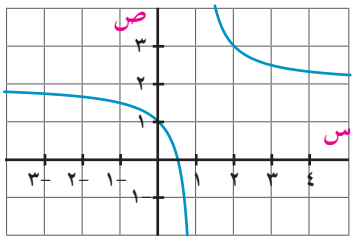
(١) أجريت بعض التحويلات الهندسية للدوال د ، ر ، ع حيث د(س) = س^{٢} ، ر(س) = س^{٣} ، ع(س) = $\frac{١}{س}$ فكانت كما فى الأشكال الآتية على الترتيب أكمل ما يأتى:



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

أ قاعدة الدالة فى شكل (١) هى

ب قاعدة الدالة فى شكل (٢) هى

ج قاعدة الدالة فى شكل (٣) هى

د الدالة ليست آحادية كما فى شكل

هـ مدى الدالة في شكل (١) هو

و مدى الدالة هو ح كما فى شكل

ز نقطة تماثل الدالة فى شكل (٣) هى

ح معادلة محور تماثل الدالة فى شكل (١) هى.....

(٢) أوجد مجال كل من الدوال المعرفة كمايلى:

أ د$_{١}$(س) = $\frac{س}{س^{٢} - ٣س - ١٠}$

ب د$_{٢}$(س) = $\sqrt{س + ٢}$

ج د$_{٣}$(س) = $\frac{٣}{\sqrt{س - ٣}}$

(٣) إذا كانت د(س) = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ ، ر(س) = ٢س فأوجد كلًّا من:

(د + ر)(س) ، (د . ر)(س) ، ($\frac{ر}{د}$)(س) ثم أوجد قيمة (د + ر) (١) ، (د . ر) (٢) ، ($\frac{ر}{د}$) (-١)

(٤) أوجد مجموعة حل كل من المعادلات والمتباينات الآتية:

أ |س + ٢| = ٣س – ١٠

ب س^{٢} – س – ١٢ < ٠

ج |٣ - ٢س| > ٥

(٥) ارسم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س - ٣| + ١، ومن الرسم ابحث إطراد الدالة، ثم أوجد مجموعة حل المعادلة د(س) = ٤

(٦) اثبت أن الدالة د حيث د(س) = $\frac{|س| + ١}{|س|}$ زوجية، وارسم منحنى د، ثم أوجد بيانيًّا وجبريًّا مجموعة حل المعادلة د(س) = ٢س – ٢، وتحقق من صحة الحل.

(٧) **الربط بالفيزياء:** أُطلق صاروخ إلى أعلى بسرعة ٩٨ متر/ث من على سطح الأرض، فإذا كانت العلاقة بين ارتفاعه عن سطح الأرض ف بالمتر، والزمن ن بالثانية تعطى بالعلاقة ف = ٩٨ ن – ٤,٩ ن^{٢} بيِّن أن هذه الدالة ليست أحادية، ثم أوجد

أ ارتفاع الصاروخ عن سطح الأرض بعد ثانيتين من لحظة انطلاقه.

ب الزمن الذى يستغرقه الصاروخ حتى يكون على ارتفاع ٤٧٠,٤ مترًا من سطح الأرض.



الوحدة الثانية

الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

Exponents, Logarithms and their Applications

مقدمة الوحدة

اكتشف علماء العرب والمسلمين الكثير من العلاقات بين علم الحساب، علم الجبر والمقابلة، وعلم الهندسة والعلاقات التى تربط بين هذه العلوم من ناحية وعلاقة كل منهم بالمنطق الرياضى من ناحية أخرى، ومن أشهر العلماء الذين برعوا في هذا المجال:

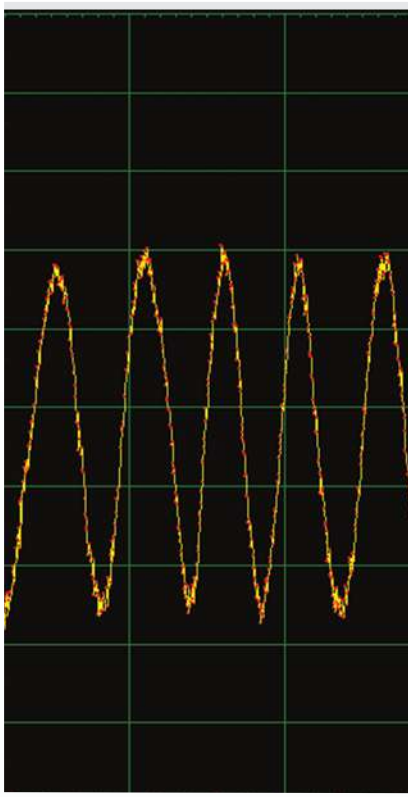
- عمر الخيام، ومن أشهر مؤلفاته مقالة في الجبر والمقابلة.
- أبو عبدالله محمد بن موسى الخوارزمى الذى اكتشف طرقًا جبرية لحل المعادلات الجبرية من الدرجة الأولى والثانية في متغير واحد أو متغيرين وغيرهم من العلماء.

وفى هذه الوحدة سنكمل دراسة الأسس الكسرية وقوانينها، ثم الدالة العكسية للدالة الأسية (الدالة اللوغاريتمية) ومدى علاقاتها بالدالة الأسية انطلاقًا إلى دراسة قوانين اللوغاريتمات وحل المعادلات الأسية واللوغاريتمية، وتطبيقات حياتية على كل من الأسس واللوغاريتمات.

أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف الدالة الأسية د: س ⟵ $أ^{س}$ حيث أ ∈ ع$^{+}$ − {١}.
- يتعرف التمثيل البياني للدالة الأسية ويستنتج خواصها.
- يتعرف قوانين الأسس الكسرية.
- يحل معادلات أسية على الصورة $أ^{س}$ = ب.
- يحل تطبيقات تؤول إلى معادلات على الصورة $أ^{س}$ = ب.
- يتعرف الدالة اللوغاريتمية ص = لو$_{أ}$ س أو د(س) = لو$_{أ}$س حيث أ ∈ ح$^{+}$ − {١}، س ∈ ح$^{+}$.
- يحول جبريًا من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس.
- يتعرف الدالة العكسية وشرط وجودها (اختبار الخط الأفقي).
- يتعرف التمثيل البياني للدالة العكسية كصورة للدالة بانعكاس على الخط المستقيم ص = س ومثال ذلك التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية في فترات محدودة كدالة عكسية للدالة الأسية ويستنتج خواصها.
- يستنتج العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغازريتمية بيانيًا.
- يتعرف قوانين اللوغاريتمات:
 - لو$_{أ}$ (س ص) = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص س > ٠ ، ص > ٠
 - لو$_{أ}$ ($\frac{س}{ص}$) = لو$_{أ}$ س − لو$_{أ}$ ص س > ٠ ، ص > ٠
 - لو$_{أ}$ (س)^{ن} = ن لو$_{أ}$ س س > ٠ ، أ ∈ ح$^{+}$ − {١} ، ن ∈ ح
 - لو$_{أ}$ ($\frac{١}{س}$) = − لو$_{أ}$ س ، س > ٠ ، أ ∈ ح$^{+}$ − {١}
 - لو$_{أ}$ س = $\frac{\text{لو}_{ب}\text{ س}}{\text{لو}_{ب}\text{ أ}}$ ، س > ٠ ، أ ، ب ∈ ح$^{+}$ − {١}
 - لو$_{أ}$ ب = $\frac{١}{\text{لو}_{ب}\text{ أ}}$ أ ، ب ∈ ح$^{+}$ − {١}
 - لو$_{أ}$ أ = ١ أ ∈ ح$^{+}$ − {١}
 - لو$_{أ}$ ١ = صفر أ ∈ ح$^{+}$ − {١}
- يحل معادلات لوغاريتمية
- يحل مسائل تشتمل علي تطبيق قوانين اللوغاريتمات.
- يتعرف اللوغاريتمات المعتادة للأساس ١٠.
- يوجد قيمة اللوغاريتم باستخدام الآلة الحاسبة .
- يستخدم الآلة الحاسبة فى حل بعض المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات.



المصطلحات الأساسية

- أس *Exponent*
- قوة *Power*
- أساس *Base*
- جذور *Radicals*
- أسس كسرية *Rational exponents*
- الجذر التربيعي *Square root*
- الجذر التكعيبي *Cubic root*
- الجذر النوني *nth root*
- جذر حقيقي *Real root*
- نمو أسي *Exponential growth*
- تضاؤل أسي *Exponential decay*
- زوجي *Even*
- فردي *Odd*
- قوانين الأسس *Laws of exponents*
- الدالة الأسية *Exponential function*
- معادلة أسية *Exponential equation*
- الدالة المتزايدة *Increasing function*
- الدالة المتناقصة *Decreasing function*
- تماثل *Symmetry*
- فائدة مركبة *Compound interest*
- دالة عكسية *Inverse function*
- لوغاريتم *logarithm*
- صورة أسية *Exponential form*
- صورة لوغاريتمية *Logarithms form*
- لوغاريتم معتاد *Common logartithm*
- لوغاريتم طبيعى *Natural logarithm*
- دالة لوغاريتمية *Logarithmic function*
- معادلة لوغاريتمية *Logarithmic equation*

دروس الوحدة

الدرس (٢ - ١): الأسس الكسرية.

الدرس (٢ - ٢): الدالة الأسية.

الدرس (٢ - ٣): حل المعادلات الأسية وتطبيقاتها.

الدرس (٢ - ٤): الدالة العكسية.

الدرس (٢ - ٥): الدالة اللوغارتمية وتمثيلها البياني.

الدرس (٢ - ٦): بعض خواص اللوغاريتمات.

الأدوات والوسائل

ورق رسم بيانى - الة حاسبة علمية - حاسب آلى - برامج رسومية.

مخطط تنظيمى للوحدة



الدرس ١

الأسس الكسرية
Rational exponents

سوف تتعلم
- تعميم قوانين الأسس.
- الجذر النونى.
- قوانين الأسس الكسرية.

المصطلحات الأساسية
- القوة النونية — *The n^{th} power*
- الأساس — *base*
- الأس — *exponent*
- جذر نونى — *n^{th} root*
- أس كسرى — *rational – exponent*

الأدوات المستخدمة
- ألة حاسبة علمية.
- برامج رسومية.

تمهيد

سبق أن درست كلًّا من الأسس والجذور عندما يكون الأس عددًا صحيحًا كما تعرفت على الجذور التربيعية لعدد حقيقى غير سالب، وعلى بعض خواص الجذور التربيعية والتكعيبية، وسوف نتعرف في هذا الدرس على الأسس الكسرية.

تعلم

مراجعة قوانين الأسس: *Revise the rules of exponents*

تعريف

١) لكل أ ∈ ح ولكل ن ∈ صـ فإن:

$أ^{ن} = أ \times أ \times أ \times \times أ$ (حيث العامل أ مكرر ن من المرات)

ويسمى $(أ^{ن})$ **بالقوة النونية** للعدد أ، حيث يسمى العدد أ **بالأساس**، والعدد ن **بالأس** ونقول أ **مرفوع** للأس ن.

٢) $أ^{صفر} = ١$ لكل أ ∈ ع - {٠}

٣) $أ^{-١} = \frac{١}{أ}$ ، $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$ $أ \neq ٠$

قوانين الأسس الصحيحة: *Rules of integer exponents*

لكل م، ن ∈ صـ ، أ، ب ∈ ع ، ب ≠ ٠ فإن:

- $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$
- $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$
- $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$
- $(أ ب)^{ن} = أ^{ن} ب^{ن}$
- $(\frac{أ}{ب})^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$

مثال

١) أوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار: $\frac{(٨)^{-٣} \times (١٨)^{٢}}{(١٦)^{-٢} \times ٨١}$

الحل

المقدار $= \frac{(٣٢)^{-٣} \times (٢ \times ٢٣)^{٢}}{(٤٢)^{-٢} \times ٤٣} = \frac{٢^{-٩} \times ٢^{٢} \times ٤٣}{٢^{-٨} \times ٤٣}$

المقدار $= ٢^{-٩+٢+٨} \times ٤٣^{-٤}$

$= ٢^{١} \times ٣^{٠} = ٢ \times ١ = ٢$

حاول أن تحل

(١) أوجد فى أبسط صورة المقدار: $\frac{(٢٧)^{-٣} \times (١٢)^{٢}}{(٨١)^{-٢} \times ١٦}$

مثال

(٢) إذا كانت م ، ن ∈ صـ فاثبت أن: $\frac{١٢٥ \times (١٥)^{ن-٢} \times (٢٥)^{م+ن}}{(٧٥)^{ن} \times (٥)^{ن+٢م}} = \frac{٥}{٩}$

الحل

الطرف الأيمن $= \frac{٣٥ \times (٣ \times ٥)^{ن-٢} \times (٢٥)^{م+ن}}{(٣ \times ٣٥)^{ن} \times (٥)^{ن+٢م}}$

$= \frac{(٥)^{٣} \times (٣)^{ن-٢} \times (٥)^{ن-٢} \times (٥)^{٢م+٢}}{(٣)^{ن} \times (٥)^{٢ن} \times (٥)^{ن+٢م}}$

$= (٥)^{٣+ن-٢+٢م+٢ن-٢-ن-٢م} \times (٣)^{ن-٢-ن}$

$= (٥)^{١} \times ٣^{-٢} = \frac{٥}{٣٢} = \frac{٥}{٩}$ (الطرف الأيسر)

حاول أن تحل

(٢) أثبت أن: $\frac{٥ \times ٣^{ن+٢} - ٤ \times ٣^{ن-١}}{٢ \times ٣^{ن+١} - ٣^{ن+٢}} = \frac{١١}{١٥}$

(٣) **تعبير شفهى:**

أ إذا كانت أ ∈ ع ، ن عدد صحيح فردى، فحدد العبارات الصحيحة فيما يأتى:

(أ) $أ^{ن} < ٠$ (ب) $أ^{ن} > ٠$ (جـ) $أ^{ن} \leqslant ٠$ (د) $أ^{ن} \geqslant ٠$

ب إذا كانت أ ∈ ع -{٠}، ن عدد صحيح زوجى، فحدد العبارات الصحيحة فيما يأتى:

(أ) $أ^{ن} < ٠$ (ب) $أ^{ن} > ٠$ (جـ) $أ^{ن} \leqslant ٠$ (د) $أ^{ن} \geqslant ٠$

تعلم

الجذر النونى

The n^{th} root

تعلمت أن:

المعادلة $س^{٢} = ٩$ لها جذران حقيقيان فقط هما $\sqrt{٩} = ٣$ أو $-\sqrt{٩} = -٣$

لاحظ أن $٣^{٢} = ٩$ ، $(-٣)^{٢} = ٩$

كذلك المعادلة $س^{٣} = ٨$ لها جذر حقيقي وحيد هو $\sqrt[٣]{٨} = ٢$ (باقي الجذور أعداد مركبة)

لاحظ أن $٨ = (٢)^{٣}$

وعلى وجه العموم:

المعادلة $س^{ن} = أ$ حيث أ ∈ ع ، ن ∈ صـ$^{+}$ **لها ن من الجذور، ونناقش فيما يلى عدة حالات:**

١ إذا كان ن زوجيا ، أ موجبا

فإن المعادلة $س^{ن} = أ$ لها جذران حقيقيان أحدهما موجب والآخر سالب (باقى الجذور أعداد مركبة) ويرمز للجذرين بالرموز $\sqrt[ن]{أ}$ ، $-\sqrt[ن]{أ}$ ، ويسمى الجذر النونى الموجب للعدد أ بالجذر النونى الأساسى للعدد أ.

مثل: المعادلة س^{٤} = ١٦ لها جذران حقيقيان هما $\sqrt[٤]{١٦}$ = ٢ ، - $\sqrt[٤]{١٦}$ = -٢

لاحظ أن (٢)^{٤} = ١٦ ، (-٢)^{٤} = ١٦

٢ إذا كان ن زوجيا ، أ سالبا

فإن المعادلة س^{ن} = أ ليس لها جذور حقيقية (جذورها تخيلية).

مثل: المعادلة س^{٢} = -٩ ليس لها جذور حقيقية (جذورها تخيلية).

٣ إذا كان ن فرديا ، أ ∈ ع

فإن المعادلة س^{ن} = أ لها جذر حقيقي وحيد هو $\sqrt[ن]{أ}$ (باقى الجذور أعداد مركبة)

مثل: المعادلة س^{٥} = -٣٢ لها جذر حقيقى وحيد هو $\sqrt[٥]{-٣٢}$ = -٢ (لاحظ أن (-٢)^{٥} = -٣٢)

٤ إذا كان ن ∈ ص$^{+}$ ، أ = صفر

فإن المعادلة س^{ن} = صفر لها حل حقيقى وحيد هو صفر.

حاول أن تحل

٤ أوجد فى ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ س^{٤} = ٨١ ب س^{٥} = ٢٤٣

٥ تفكير ناقد: وضح بمثال عددى الفرق بين الجذر السادس للعدد أ وبين $\sqrt[٦]{أ}$

تعلم

الأسس الكسرية *rational exponents*

تعلمت أن الجذر التربيعى للعدد الحقيقى غير السالب أ هو العدد الذى مربعه يساوى أ وبفرض أ^{م} تمثل الجذر التربيعى الأساسى للعدد أ

∴ (أ^{م})^{٢} = أ ∴ أ^{م٢} = أ ومنها م = $\frac{١}{٢}$

أى أن أ$^{\frac{١}{٢}}$ هى الجذر التربيعى الأساسى للعدد أ أى أن $\sqrt{أ}$ = أ$^{\frac{١}{٢}}$

بالمثل أ$^{\frac{١}{٣}}$ هى الجذر التكعيبى الأساسى للعدد أ أى أن $\sqrt[٣]{أ}$ = أ$^{\frac{١}{٣}}$ وعمومًا $\sqrt[ن]{أ}$ = أ$^{\frac{١}{ن}}$

مثال

٣ أوجد قيمة كل مما يأتى (إن أمكن)

أ (١٦)$^{\frac{١}{٤}}$ ب -(٢٧)$^{\frac{١}{٣}}$ ج (-٢٤٣)$^{\frac{١}{٥}}$ د (-٩)$^{\frac{١}{٢}}$

الحل

أ (١٦)$^{\frac{١}{٤}}$ = $\sqrt[٤]{١٦}$ = ٢

ب -(٢٧)$^{\frac{١}{٣}}$ = -$\sqrt[٣]{٢٧}$ = -٣

ج (-٢٤٣)$^{\frac{١}{٥}}$ = $\sqrt[٥]{-٢٤٣}$ = -٣

د (-٩)$^{\frac{١}{٢}}$ = $\sqrt{-٩}$ ∉ ع

حاول أن تحل

٦ أوجد (إن امكن) قيمة كل من:

أ $-\sqrt[٣]{٣٦}$ ب $-(٨١)^{\frac{١}{٤}}$ ج $(-١٢٥)^{\frac{٢}{٣}}$ د $|\sqrt[٧]{-١٢٨}|$

خواص الجذور النونية *Properties of n^{th} roots*

١ $\sqrt[ن]{أ ب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$ ، $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$ حيث $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب}$ $\in$ ع

٢ $\sqrt[ن]{أ^{م}} = (\sqrt[ن]{أ})^{م} = أ^{\frac{م}{ن}}$ حيث أ $\in$ ع - {٠}، ب $\in$ صـ$^{+}$ - {١}، م $\in$ صـ

مثل: $١٦^{\frac{٣}{٤}} = (\sqrt[٤]{١٦})^{٣} = ٣٤ = ٦٤$

مثال

٤ أوجد فى أبسط صورة كل من:

أ $-\sqrt[٣]{٨ أ^{٦} ب^{٩}}$ ب $\sqrt[٣]{١٦ س^{٤} ص^{٨}}$

الحل

أ $-\sqrt[٣]{٨ أ^{٦} ب^{٩}} = -\sqrt[٣]{٨} \times \sqrt[٣]{أ^{٦}} \times \sqrt[٣]{ب^{٩}} = -٢ أ^{٢} ب^{٣}$

ب $\sqrt[٤]{١٦ س^{٤} ص^{٨}} = \sqrt[٤]{١٦} \times \sqrt[٤]{س^{٤}} \times \sqrt[٤]{ص^{٨}} = ٢ |س| ص^{٢}$

لاحظ أن

$\sqrt[ن]{أ^{ن}} = |أ|$ إذا كان ن زوجى

$\sqrt[ن]{أ^{ن}} = أ$ إذا كان ن فردى

حاول أن تحل

٧ أوجد فى أبسط صورة كل من:

أ $\sqrt[٤]{١٦ أ^{١٢}}$ ب $\sqrt[٦]{(س + ٢ص)^{١٨}}$

مثال

٥ أوجد فى أبسط صورة كل من

أ $(١٨)^{-\frac{١}{٢}} \times (١٢)^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{١}{(٢٤)^{\frac{١}{٢}}}$ ب $\frac{(٣^{\frac{١}{٣}}) \times (١٤٧)^{\frac{١}{٦}}}{(٦٣)^{\frac{١}{٣}}}$

الحل

أ المقدار $= (٢ \times ٣^{٢})^{-\frac{١}{٢}} \times (٣ \times ٢^{٢})^{\frac{٣}{٢}} \times (٣ \times ٣^{٢})^{-\frac{١}{٢}} = ٢^{-\frac{١}{٢}} \times ٣^{\frac{٣}{٢}} \times ٢^{\frac{٣ \times ٢}{٢}} \times ٣^{\frac{٣}{٢}} \times ٣^{-\frac{٢}{٣}} \times ٢^{-\frac{٣}{٢}}$

$= ٢^{\frac{-١+٣-٦}{٢}} \times ٣^{\frac{-١-٣+٢}{٢}} = ٢^{\frac{-٤}{٢}} \times ٣^{\frac{-٢}{٢}} = ٣^{-١} \times ٢^{-٢} = \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{١٢}$

ب المقدار $= \frac{(٣^{\frac{١}{٣}}) \times (٢٧ \times ٣)^{\frac{١}{٦}}}{(٧ \times ٢٣)^{\frac{١}{٣}}} = \frac{٣^{\frac{١}{٣}} \times ٣^{\frac{١}{٦}} \times ٧^{\frac{١}{٦}}}{٧^{\frac{١}{٣}} \times ٣^{\frac{٢}{٣}}}$

$٣^{\frac{١}{٣}+\frac{١}{٦}-\frac{٢}{٣}} \times ٧^{\frac{١}{٦}-\frac{١}{٣}} = ٣^{٠} \times ٧^{-\frac{١}{٦}} = ١ \times ١ = ١$

حاول أن تحل

٨ أثبت أن:

أ $\frac{(٣٤٣)^{٢س-\frac{١}{٣}} \times (٤)^{٣س+١}}{(١٩٦)^{٣س} \times ٤} = \frac{١}{٧}$ ب $\frac{١٢٥ \times \sqrt[٣]{٤^{٨}} \times ١٠^{-\frac{١}{٤}}}{١٥^{\frac{٣}{٤}} \times \sqrt[٤]{٦^{-٣}} \times ٤^{\frac{٥}{٨}}} = ٢٥$

لاحظ أن

تعميم قوانين الأسس

الأسس الكسرية تخضع لنفس قوانين الأسس الصحيحة.

مثال

٦ **الربط بالهندسة:** إذا كان طول نصف قطر كرة (ر) يُعطى بالعلاقة $ر = \sqrt[٣]{\frac{٣ ح}{٤ \pi}}$، فأوجد طول نصف قطر كرة حجمها ٦٠٠سم^{٣} مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية. حيث ح حجم الكرة.

الحل

صيغة القانون: $ر = \sqrt[٣]{\frac{٣ ح}{٤ \pi}}$

بالتعويض عن: ح = ٦٠٠ $ر = \sqrt[٣]{\frac{٣ \times ٦٠٠}{٤ \pi}}$

وباستخدام الآلة الحاسبة: $ر = ٥,٢٣٢٢٣٨٦٨$

وبالتقريب إلى ثلاثة أرقام عشرية: $ر \simeq ٥,٢٣٢$

حاول أن تحل

٩ في المثال السابق أوجد لأقرب ثلاثة أرقام عشرية مساحة سطح الكرة (مساحة سطح الكرة = $٤ \pi ر^{٢}$)

١٠ **الربط بالتعليم:** إذا كان ص = $\sqrt[٣]{س}$ تمثل عدد أخطاء كتابة الكلمات (س) باستخدام الحاسب الآلي، قدر عدد الأخطاء (ص) من بين ٢٠٠ كلمة مكتوبة.

مثال

حل المعادلات

٧ أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

أ $س^{\frac{٣}{٥}} = ٢٧$ ب $(س - ٢)^{\frac{٢}{٣}} = ٢٥$ ج $س^{\frac{٤}{٣}} - ١٠ س^{\frac{٢}{٣}} + ٩ =$ صفر

الحل

أ ∵ $س^{\frac{٣}{٥}} = ٢٧$ — برفع الطرفين للقوة ٥

$(س^{\frac{٣}{٥}})^{٥} = (٢٧)^{٥}$

∴ $س^{٣} = ٢٧^{٥}$ — بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

∴ س $= (\sqrt[٣]{٢٧})^{٥} = ٣^{٥} = ٢٤٣$ ∴ مجموعة الحل = {٢٤٣}

ب $(س - ٢)^{\frac{٢}{٣}} = ٢٥$ — برفع الطرفين للقوة ٣ فتكون

∴ $(س - ٢)^{٢} = ٢٥^{٣}$ — بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

∴ $س - ٢ = \pm (\sqrt[٢]{٢٥})^{٣}$

∴ $س - ٢ = \pm ١٢٥$

إما $س - ٢ = ١٢٥$ ومنها س = ١٢٧

أو $س - ٢ = -١٢٥$ ومنها س = -١٢٣

∴ مجموعة الحل = {١٢٧ ، -١٢٣}

ج $س^{\frac{4}{3}} - ١٠ س^{\frac{2}{3}} + ٩ = ٠$ بتحليل الطرف الأيمن

$(س^{\frac{2}{3}} - ٩)(س^{\frac{2}{3}} - ١) = ٠$

إما $س^{\frac{2}{3}} - ٩ = ٠$ أو $س^{\frac{2}{3}} - ١ = ٠$

$\therefore س^{\frac{2}{3}} = ٩$ $س^{\frac{2}{3}} = ١$

$\therefore س^{٢} = ٣٩$ $س^{٢} = ١$

$\therefore س = \pm (\sqrt[3]{٩})^{٣} = \pm ٢٧$ $س = \pm ١$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{٢٧ ، -٢٧ ، ١ ، -١\}$

حاول أن تحل

(١١) أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات

أ $س^{\frac{4}{3}} = ٨١$ ب $(س + ١)^{-\frac{5}{3}} = ٣٢^{-\frac{1}{3}}$ ج $س^{\frac{4}{5}} - ٣ س^{\frac{2}{5}} - ٤ =$ صفر

تمـــاريـن الدرس الأول

(١) اختصر $\frac{\sqrt[3]{٨} \times ٤^{-١} \times ٢^{-\frac{3}{3}}}{٦^{-٢} \times ٣^{٣}}$

(٢) متى تكون العلاقة $\sqrt[ن]{أ ب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$ صحيحة لجميع قيم أ ، ب الحقيقية.

(٣) أكمل ما يأتى:

أ $(٨)^{\frac{2}{3}}$ فى أبسط صورة تساوى

ب $(٦\frac{١}{٤})^{\frac{3}{2}}$ فى أبسط صورة تساوى

ج $(\frac{١٦}{٦٢٥})^{-\frac{3}{4}}$ فى أبسط صورة تساوى

د $\sqrt[٣]{(\frac{٣}{٨})^{-١}}$ فى أبسط صورة تساوى

هـ $(٢٥ - ٢٣)^{\frac{1}{2}}$ فى أبسط صورة تساوى

(٤) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

أ إذا كان $٥^{س} = ٢$ فإن $٢٥^{س}$ تساوى $(١٠ ، ٦٢٥ ، ٤ ، ٢)$

ب $(٧٢ \div ٢^{٥})^{-\frac{1}{3}}$ تساوى $(٢ ، -٢ ، \frac{١}{٢} ، -\frac{١}{٢})$

ج إذا كان $س^{\frac{3}{2}} = ٦٤$ فإن س تساوى $(٥١٢ ، ١٦ ، ٤ ، ٢)$

د أي مما يأتي لا يكافئ $(\sqrt[٣]{س^{٤}})$ $((\sqrt[٣]{س})^{٤} ، \sqrt[٤]{س^{٥}} ، س^{\frac{4}{5}} ، (س^{\frac{1}{5}})^{٤})$

هـ إذا كان $٤ س^{٥} = ١٢٨$ فإن س تساوى $(٤ ، \pm ٢ ، ٢ ، -٢)$

و مجموعة الجذور الحقيقية للمعادلة $(س - ٢)^{٤} = ١٦$ يساوي $(\{صفر\} ، \{٤\} ، \{٨\} ، \{٠ ، ٤\})$

ز إذا كان $أ^{٣} = ٤^{ب}$ فإن $٩^{\frac{1}{ب}} + ١٦^{\frac{1}{أ}}$ تساوى $(٧ ، ١٢ ، ٢٠ ، ٢٥)$

٥ اكتشف الخطأ:

أ $-٩ = (-٩)^{\frac{٢}{٢}} = \sqrt{(-٩)^{٢}} = \sqrt{٨١} = ٩$

ب إذا كان $س^{٤} = ٨١$ فإن $س = \sqrt[٤]{٨١}$ $\therefore$ $س = ٣$

٦ الربط بالهندسة: إذا كان طول نصف قطر كرة يعطى بدلالة الحجم من العلاقة $ح = (\frac{٣ح}{٤\pi})^{\frac{١}{٣}}$. أوجد الزيادة في طول نصف القطر عندما يتغير الحجم من $\frac{٣٢}{٣}\pi$ إلى ٣٦π وحدة مكعبة.

٧ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $س^{\frac{٥}{٢}} = \frac{١}{٣٢}$

ب $س^{٤} = ٨١$

جـ $\sqrt[٣]{(س-١)^{٥}} = ٣٢$

د $(س^{٢} - ٥س + ٩)^{\frac{٥}{٢}} = ٢٤٣$

هـ $س^{\frac{٤}{٥}} - ٥س^{\frac{٢}{٥}} + ٤ =$ صفر

و $س + ١٥ = ٨\sqrt{س}$

ز $\sqrt[٣]{س^{٣}} - ٢٥\sqrt{س} - ٥٤ =$ صفر

ح $(٢س - ١)^{٤} = (س + ٣)^{٤}$

٨ إذا كان $س^{\frac{٣}{٢}} = ٣ص^{\frac{٢}{٣}} = ٢٧$ فما قيمة $س + ص$

٩ تفكير ابداعي: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

أ إذا كان $س <$ صفر فإن: $\sqrt{س^{٢}} - \sqrt[٣]{س^{٣}} - \sqrt{س^{٢} - ٢س + ١} + ١ =$ (س ، -س ، صفر ، - ١)

ب إذا كان $أ = \sqrt[٤]{\frac{\sqrt[٣]{٢}}{\sqrt{٧}}}$ فأي الأعداد الآتية عدد نسبي ($أ^{\frac{١}{٢}}$ ، $أ^{\frac{١}{٦}}$ ، $أ^{\frac{١}{٨}}$ ، $أ^{\frac{١}{٢٤}}$)

نشاط

استخدم الآلة الحاسبة في تبسيط إجراء العمليات الآتية (مقربًا الناتج إلى رقمين عشريين)



أ $\sqrt[٣]{\frac{٧^{٤} \times ٣^{-٥}}{٢^{-٧}}}$

ب $(٢٣)^{-\frac{٣}{٢}} + (٠,٠١)^{-\frac{٥}{٣}}$

الدرس ٢

الدالة الأسية
Exponential Function

سوف تتعلم
- الدالة الأسية.
- تمثيل الدوال الأسية بيانيًا.
- خواص الدالة الأسية.

المصطلحات الأساسية
- دالة أسية. expontential function
- نمو إسي. exponential growth
- تضاؤل أسي. exponential decay

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية.

نشاط

تتكاثر خلايا البكتريا بطريقة الانقسام المباشر إلى خليتين فى كل مرة خلال فترة زمنية محدودة ثم تنقسم الخليتين إلى أربع خلايا، ثم تنقسم الأربع إلى ثمانية، و يستمر انقسام الخلايا بنفس الطريقة خلال نفس الفترات الزمنية وفى نفس الظروف.

يبين الجدول التالى زمن الانقسام لخلية البكتريا بالساعة وعدد الخلايا الناتجة.

الزمن بالساعة	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
عدد الخلايا	١	٢	٤				٦٤

١ أكمل الجدول السابق.

٢ عبِّر عن عدد خلايا كل انقسام بالصورة الأسية للأساس ٢.

٣ ماذا تتوقع أن تكون عدد الخلايا بعد مرور ٨ ساعات.

٤ عبِّر بالصورة الأسية عن عدد خلايا البكتريا بالانقسام بعد مرور س ساعة.

تعلم

الدالة الأسية Exponential Function

تعريف

تسمى الدالة د حيث د(س) = $أ^{س}$ حيث أ > ٠ ، أ ≠ ١ ، س ∈ ع **بالدالة الأسية**.

مثال:

د(س) = $٢^{س}$ أساسها (٢) و**أسها** (س).

د(س) = $٥^{س+١}$ أساسها (٥) و**أسها** (س+١).

د(س) = $(\frac{١}{٣})^{٢س}$ أساسها $(\frac{١}{٣})$ و**أسها** (٢س)

تذكر أن

الدالة الجبرية: يكون المتغير المستقل (س) هو الأساس أما الأس فهو عدد حقيقى.

الدالة الأسية: يكون المتغير المستقل (س) هو الأس أما الأساس فهو عدد حقيقي موجب لايساوى الواحد.

حاول أن تحل

(١) بين أى الدوال الآتية دالة أسية، ثم اكتب أسها وأساسها.

أ د(س) = $س^{٢}$

ب د(س) = $(٢)^{س}$

ج د(س) = $\frac{٣}{س+١}$

د د(س) = $س^{٣} - ١$

هـ د(س) = $(\frac{٣}{٤})^{س-١}$

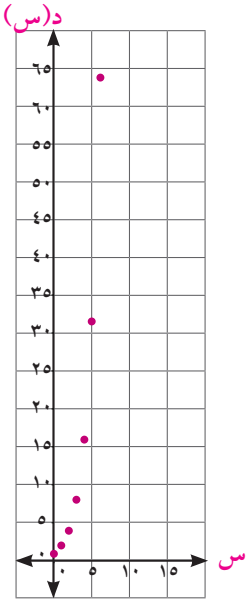
و د(س) = $(-٢)^{س}$

التمثيل البياني للدالة الأسية

Graphical representation of exponential function

في النشاط السابق الذى يبين العلاقة بين زمن الانقسام لخلية البكتريا بالساعة وعدد الخلايا الناتجة يمكن تمثيله بيانيًّا كما فى الشكل التالى:

الزمن بالساعة	عدد الخلايا
٠	١
١	٢
٢	٤
٣	٨
٤	١٦
٥	٣٢
٦	٦٤



فى الشكل المقابل أن:

الدالة الممثلة هى **دالة أسية** أساسها ٢ وأسها س، حيث د(س) = ٢^س، ونلاحظ أن الدالة تزايدية على مجالها.

{٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ،} وتسمى مثل هذه الدالة **دالة نمو أسى**، ويسمى العدد (٢) **عامل النمو** لهذه الدالة.

بينما إذا أخذنا الدالة ر المعرفة على ع حيث ر(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$ نجد أنه كلما ازداد قيم المتغير س نقص (تضاءل) ر(س)؛ لذلك تسمى مثل هذه الدالة **دالة تضاؤل أسى** ويسمى العدد $(\frac{١}{٢})$ **عامل التضاؤل** لهذه الدالة.

مثال

(١) ارسم فى شكل واحد منحنى كل من الدالتين د١، د٢ حيث : د١(س) = (٢)^س، د٢(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$ حيث س ∈ ع ومن الرسم أوجد:

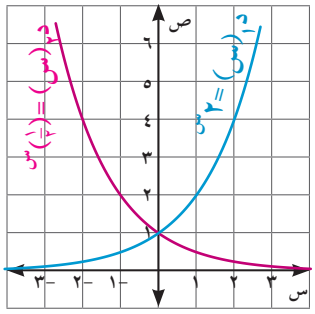
(أ) المدى لكل من الدالتين د١، د٢.

(ب) إحداثيي النقطة المشتركة لتقاطع الدالتين.

(جـ) معادلة محور التماثل لمنحنى الدالتين معًا (الشكل المرسوم).

الحل

س	د١(س)	د٢(س)
-٣	$\frac{١}{٨}$	٨
-٢	$\frac{١}{٤}$	٤
-١	$\frac{١}{٢}$	٢
صفر	١	١
١	٢	$\frac{١}{٢}$
٢	٤	$\frac{١}{٤}$
٣	٨	$\frac{١}{٨}$



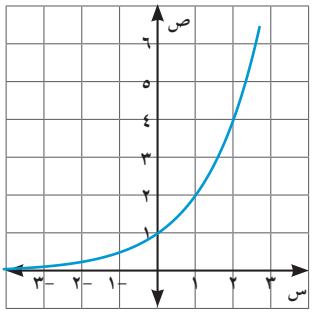
من الرسم نجد أن:

١ مدى كل من الدالتين د١، د٢ هو ع+.

٢ إحداثيي النقطة المشتركة لتقاطع الدالتين هو (٠، ١).

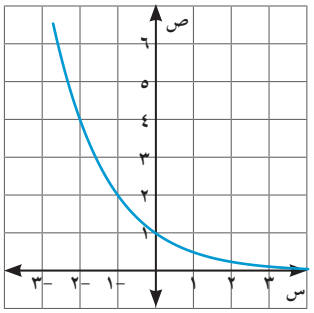
٣ معادلة محور التماثل لمنحنى الدالتين هو المستقيم س = ٠ (محور الصادات).

خواص الدالة الأسية: *Properties of exponential function*



د(س) = $أ^{س}$ عندما أ > ١

- تسمى الدالة د دالة نمو أسى، وتكون تزايدية على مجالها ع، ويقترب خطها البياني من محور السينات (الاتجاه السالب).
- $أ^{س}$ < ١ عندما س ∈ $ع^{+}$
- ٠ < $أ^{س}$ < ١ عندما س ∈ $ع^{-}$



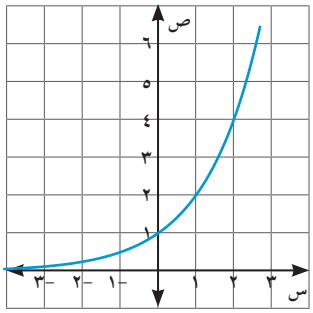
د(س) = $أ^{س}$ عندما ١ < س < ٠

- تسمى الدالة ر دالة تضاؤل أسى، وتكون تناقصية على مجالها ع، ويقترب خطها البيانى من محور السينات (الاتجاه الموجب).
- $أ^{س}$ > ١ عندما س ∈ $ع^{-}$
- ٠ < $أ^{س}$ < ١ عندما س ∈ $ع^{+}$

منحنى الدالتين د، ر حيث د(س) = $أ^{س}$ ، ر(س) = $(\frac{١}{أ})^{س}$ متماثلان معًا بالنسبة لمحور الصادات.

حاول أن تحل

(٢) الشكل المقابل يمثل الدالة د المعرفة على ع ، حيث د(س) = $(٢)^{س}$. ارسم على نفس الشكل منحنى الدالة ر المعرفة على ع ، حيث ر(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$، ثم أوجد مجال ومدى كل من الدالتين، ثم بيِّن أى منهما تزايدية أو تناقصية مع ذكر السبب.



(٣) تفكير ناقد: إذا كانت د(س) = $أ^{س}$ حيث ٠ < أ < ١ رتب كل مما يأتى ترتيبًا تصاعديًا د(٧) ، د(-٢) ، د($\sqrt{٥}$) ، د(٠).

مثال

(٢) اذا كانت د (س) = $٣^{س}$ فأكمل ما يأتى:

أ د(٢) = ... ب د(س + ٢) = ... × د (س) ج د (س) × د (-س) = ...

الحل

أ د(٢) = $٣^{٢}$ = ٩

ب د (س + ٢) = $٣^{س+٢}$ = $٣^{س} \times ٣^{٢}$ = ٩ د (س)

ج د(س) × د (-س) = $٣^{س} \times ٣^{-س}$ = $٣^{س-س}$ = $٣^{٠}$ = ١

النمو الأسى: *Exponential growth*

يمكن استخدام الدالة د، حيث د(ن) = أ $(١ + ر)^{ن}$ لتمثيل النمو الأسى بنسبة مئوية ثابتة فى فترات زمنية متساوية، حيث ن هى الفترة الزمنية، أ القيمة الابتدائية، ر النسبة المئوية للنمو فى الفترة الزمنية الواحدة. (ناقش معلمك لاستنتاج العلاقة السابقة.)

مثال

(٣) **الربط بالسكان:** إذا كان المعدل السنوى للنمو السكانى فى إحدى محافظات جمهورية مصر العربية خلال الفترة من أول يناير ٢٠١١ إلى نهاية ديسمبر ٢٠١٥ هو ٣,٥٪ سنويًّا، فإذا كان عدد سكان هذه المحافظة عام ٢٠١١ هو ٦٤٥٦٠٠٢ نسمة.

أولًا: اكتب دالة أسية تمثل النمو السكانى خلال هذه الفترة.

ثانيًا: قدر عدد السكان المتوقع فى نهاية ديسمبر ٢٠١٥.

الحل

أ = ٦٤٥٦٠٠٢ ، ر = $\frac{٣,٥}{١٠٠}$ = ٠,٠٣٥ ، الفترة الزمنية ن = ٥ سنوات.

أولًا: دالة النمو الأسى هى د حيث د(ن) = أ (١ + ر)^{ن} وبالتعويض عن قيم أ، ر فإن:

د(ن) = ٦٤٥٦٠٠٢ (١ + ٠,٠٣٥)^{ن} أى أن: د(ن) = ٦٤٥٦٠٠٢ (١,٠٣٥)^{ن}

ثانيًا: بالتعويض عن ن = ٥ فى دالة النمو الأسى:

د(٥) = ٦٤٥٦٠٠٢ (١,٠٣٥)^{٥} = ٧٦٦٧٧٠٥,١٦٥ أى أن: عدد السكان المتوقع = ٧٦٦٧٧٠٥ نسمة.

لاحظ أن

مدى الدالة الأسية: هو دائمًا مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ع$^{+}$.

إحداثى نقطة تقاطع الدالة الأسية مع محور الصادات: هى النقطة (٠، ١).

حاول أن تحل

(٤) يتكاثر النحل فى أحد الخلايا، فيزداد بمعدل ٢٥٪ كل أسبوع، فإذا كان عدد النحل فى البداية ٦٠ نحلة. اكتب دالة أسية تمثل عدد النحل بعد ن أسبوع، ثم قدر عدد النحل بعد ٦ أسابيع.

التضاؤل الأسى: *Exponential decay*

يمكن استخدام الدالة د حيث د(ن) = أ (١ - ر)^{ن} لتمثيل التضاؤل الأسى بنسبة مئوية ثابته فى فترات زمنية متساوية، حيث ن هى الفترة الزمنية، أ القيمة الابتدائية، ر النسبة المئوية للنمو فى الفترة الزمنية الواحدة.

مثال

(٤) **الربط بالتجارة:** اشترى كريم سيارة جديدة بمبلغ ١٢٠٠٠٠ جنيه، فإذا كان سعر السيارة يتناقص بمعدل ١٢٪ كل سنة.

أولًا: اكتب دالة أسية تمثل سعر السيارة بعد ن سنة من شرائها.

ثانيًا: قدر لأقرب جنية سعر السيارة بعد مرور ٦ سنوات من شرائها.

الحل

أ = ١٢٠٠٠٠ ، ر = $\frac{١٢}{١٠٠}$ = ٠,١٢ ، الفترة الزمنية ن = ٦ سنوات

أولًا: دالة التضاؤل الأسى هى: د(ن) = أ(١ - ر)^{ن} وبالتعويض عن قيم أ ، ر فإن:

د(ن) = ١٢٠٠٠٠ (١ - ٠,١٢)^{ن} أى أن: د(ن) = ١٢٠٠٠٠ (٠,٨٨)^{ن}

ثانيًا: بالتعويض عن ن = ٦ فى دالة النمو الأسى:

د(٥) = ١٢٠٠٠٠(٠,٨٨)^{٦} = ٥٥٧٢٨,٤٩٠٤١

سعر السيارة المتوقع بعد مرور ٦ سنوات يقدر بمبلغ ٥٥٧٢٨ جنيه

حاول أن تحل

٥ **الربط بالطب:** يتناول أحد المرضى ٤٠ مليجرام من عقار طبى، ويمكن لجسم المريض أن يتخلص من ١٠٪ من هذا العقار تقريبًا فى الساعة.

أ اكتب معادلة أسية تمثل كمية العقار المتبقية فى جسم هذا المريض بعد تناول العقار.

ب قدر كمية العقار المتبقية فى جسم المريض بعد ٤ ساعات من تناول العقار.

تمـــارين الدرس الثانى

١ أكمل ما يأتى:

أ تكون الدالة د حيث د(س) = $أ^{س}$ دالة أسية إذا كانت أ ، س

ب الدالة الاسية ر حيث ر(س) = $٣ س^{-١}$ أساسها هو وأسها هو

جـ الدالة و حيث و(س) = $(-\frac{١}{٢})^{س+١}$ ليست دالة أسية لأن

د إحداثيا نقطة تقاطع الدالة الأسية د(س) = $أ^{س}$ مع المستقيم س = ٠ هى النقطة (..... ،)

هـ معادلة محور التماثل لمنحنى الدالتين د، ر حيث: د(س) = $٣^{س}$، ر(س) = $(\frac{١}{٣})^{س}$ هو

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الاجابات الآتية:

أ تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تزايدية إذا كانت

(أ) أ < ٠ (ب) أ < ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = ١

ب تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تناقصية إذا كانت :

(أ) أ < ٠ (ب) أ > ٠ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) -١ < أ < ٠

جـ الدالة الأسية د حيث د(س) = $أ^{س}$ ، أ < ١ يقترب خطها البيانى من:

(أ) محور السينات (الاتجاه الموجب) (ب) محور السينات (الاتجاه السالب)

(جـ) محور الصادات (الاتجاه الموجب) (د) محور الصادات (الاتجاه السالب)

د فى الدالة الأسية د حيث د(س) = $أ^{س}$ ، (أ < ١) تكون د(س) > ١ عندما:

(أ) س ∈ ع (ب) س ∈ $ع^{+}$ (جـ) س ∈ $ع^{-}$ (د) س ∈ صـ

هـ فى الدالة الأسية ر حيث ر(س) = $أ^{س}$ ، (٠ < أ < ١) تكون ٠ < $أ^{س}$ < ١ عندما س ∈

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٠[(جـ)]١ ، ∞[(د)]-∞ ، ١[

٣ بين أى من الدوال الآتية دالة أسية، ثم اكتب أسها وأساسها:-

أ د(س) = $٢س^{٣}$ ب د(س) = $(٥)^{\frac{٢}{٣}س}$ جـ د(س) = $\frac{١}{س - ١}$

د د(س) = $٣س^{٢} - ١$ هـ د(س) = $(\frac{٢}{٣})^{س-١}$ و د(س) = $(-٧)^{س}$

٤ مثِّل الدالة د في كل مما يأتي بيانيًّا، ثم أوجد المجال والمدى لكل منها، وبيِّن أى منها تزايدية وأى منها تناقصية:

أ د(س) = ٣^س ب د(س) = (١/٢)^س ج د(س) = -٣ (٢)^س د د(س) = ٢^(س+١) + ١

هـ د(س) = (١/٢)^(س+٢) - ٢ و د(س) = ٢ (٢/٣)^(س-١) + ١ ز د(س) = -(١/٢)^(٢س) + ٣/٤

٥ **الربط بالأدخار:** أودع زياد مبلغ ٨٠٠٠٠ جنية فى أحد البنوك بفائدة سنوية ١٠,٥٪، كم يصبح جملة رصيده بعد ١٠ سنوات، علمًا بأن جملة الرصيد تعطى بالعلاقة:

حـ = م(١ + ر)^ن حيث م المبلغ، ر النسبة المئوية للفائدة ، ن عدد السنوات

٦ **الربط بالاتصالات:** يتناقص عدد الهواتف الأرضية فى إحدى المدن نتيجة انتشار الهواتف المحمولة بمعدل ١٠٪، فإذا كان عدد الهواتف فى إحدى السنوات ٥٤٠٠٠ هاتف، فاكتب دالة أسية تمثل عدد هذه الهواتف بعد مرور ن سنة، ثم قدِّر عدد الهواتف بعد مرور ٤ سنوات.

٧ **الربط بالاستثمار:** بلغ عدد الأبقار فى أحد مزارع الماشية ٨٠ بقرة، فإذا كان معدل التكاثر لهذه الابقار يبلغ ١٨٪ سنويًّا تقريبًا، فأوجد عدد الأبقار فى المزرعة بعد ٤ سنوات.

٨ **الربط بالسكان:** بلغ تعداد سكان إحدى المحافظات فى جمهورية مصر العربية ٤,٦ مليون نسمة بمتوسط زيادة ٤ ٪ سنويًّا.

أولًا: اكتب دالة أسية تمثل النمو المستقبلى بعد ن سنة.

ثانيًا: قدِّر عدد سكان هذه المحافظة بعد مرور ٥ سنوات من وقت التعداد.

٩ **الربط بالرياضة:** يتناقص عدد المشجعين لإحدى فرق كرة القدم بمعدل ٤٪ نتيجة خسارتها فى إحدى الدورات الرياضية، فإذا كان عدد المشجعين فى أول مباراة ٣٦٤٠٠ فاكتب دالة أسية تمثل عدد الحضور (ص) فى المباراة (ن)، ثم قدر عدد المشجعين فى المباراة العاشرة.

١٠ **تفكير إبداعي:** إذا كان د(س) = ٢^س فأثبت أن المقدار ١/(١+د(س)) + ١/(١+د(-س)) له قيمة ثابتة مهما كانت قيمة س.

نشاط

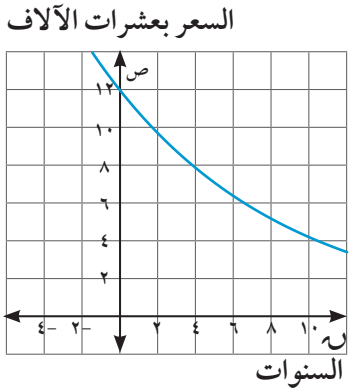
١١ **الربط بالتجارة:** يمثل الشكل المقابل دالة تضاؤل أسى لسعر أحد أنواع السيارات فى أحد معارض تجارة السيارات

أ كم تكون القيمة الابتدائية لقيمة السيارة بالجنيه؟

ب قدِّر النسبة المئوية لانخفاض قيمة السيارة.

جـ اكتب دالة أسية تمثل قيمة السيارة بعد ن سنة.

د قدِّر قيمة السيارة بالجنية بعد مرور ٦ سنوات.



الدرس ٣

حل المعادلات الأسية وتطبيقاتها

Solving power equations and its application

استكشف

إدرس الجدول الآتي وحاول إكمال الناقص:

س	١	٢	٣	٥	
$٢^{س}$	٢	٤	٨		١٢٨

تعلم

المعادلة الأسية *Power equation*

إذا تضمنت المعادلة متغيرًا في الأس، فإنها تسمى معادلة أسية مثل ($٣^{س} = ٢٧$) فنجد:

أولًا: إذا كان $أ^{م} = أ^{ن}$ حيث $أ \neq \{٠، ١، -١\}$ فإن $م = ن$.

مثال

(١) أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $٣^{س+١} = \frac{١}{٢٧}$ ب $(\sqrt{٢}\ ٢)^{س-٣} = ٨^{س-٢}$

الحل

أ $٣^{س+١} = \frac{١}{٢٧}$ ∴ $٣^{س+١} = ٣^{-٣}$

∴ س + ١ = -٣ ومنها س = -٤ ∴ مجموعة الحل = {-٤}

ب $(\sqrt{٢}\ ٢)^{س-٣} = ٨^{س-٢}$ ∴ $(٢ \times ٢^{\frac{١}{٢}})^{س-٣} = (٣٢)^{س-٢}$

∴ $(٢^{\frac{٣}{٢}})^{س-٣} = (٣٢)^{س-٢}$ ∴ $٢^{\frac{٣}{٢}(س-٣)} = ٢^{٣(س-٢)}$

∴ $\frac{٣}{٢}$ س - ٦ = ٣س - ٩ بالضرب في ٢

∴ ٣س - ٩ = ٦س - ١٢ ∴ ٣س - ٦س = ٩ - ١٢

-٣س = -٣ ومنها س = ١ ∴ مجموعة الحل = {١}

حاول أن تحل

(١) أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $٢^{٣-س} = \frac{١}{١٦}$ ب $\frac{(٣^{٢} + ٥^{٢})^{س}}{٦٨^{س}} = \frac{١}{٣٢}$

ثانيًا: إذا كان $أ^{م} = ب^{م}$ حيث أ، ب $\neq \{٠، ١، -١\}$، فإن

إما: ١- م = صفر

أو: ٢- أ = ب عندما م عدد فردي

٣- أ = |ب| عندما م عدد زوجي.

سوف تتعلم

- حل المعادلة الأسية جبريًا.
- حل المعادلة الأسية بيانيًا.

المصطلحات الأساسية

- معادلة أسية *Power equation*
- الحل البياني *graphical solution*

الأدوات المستخدمة

- حاسب آلي مزود ببرامج رسومية.
- آلة حاسبة علمية.

مثال

(٢) أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

(أ) $٢^{س-٣} = ٥^{س-٣}$ (ب) $٧^{س+١} = ٣^{٢س+٢}$

الحل

(أ) $٢^{س-٣} = ٥^{س-٣}$ ∴ س - ٣ = صفر ومنها س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

(ب) $٧^{س+١} = ٣^{٢س+٢}$ ∴ $٧^{س+١} = ٣^{٢(س+١)}$ ∴ $٧^{س+١} = ٩^{س+١}$

∴ س + ١ = صفر ومنها س = -١ ∴ مجموعة الحل = {-١}

حاول أن تحل

(٢) أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات

(أ) $٣^{س-٥} = ٢^{س-٥}$ (ب) $٤^{س+٢} = ٣^{٢س+٤}$

(٣) تفكير ناقد: أوجد جميع الحلول الممكنة للمعادلة $س^{س-٢} = ٤^{س-٢}$

مثال

(٣) إذا كانت د(س) = $٣^{س}$

(أ) أثبت أن د(س + ٢) × د(س - ٢) = د(٢س) (ب) إذا كان د(س + ١) - د(س - ١) = ٧٢ أوجد قيمة س

الحل

(أ) **الطرف الأيمن** = د(س + ٢) × د(س - ٢) = $٣^{س+٢} \times ٣^{س-٢}$

= $٣^{س+٢+س-٢}$

= $٣^{٢س}$

= د(٢س) = **الطرف الأيسر**

(ب) ∵ د(س + ١) - د(س - ١) = ٧٢

∴ $٣^{س} \times ٣ - \frac{٣^{س}}{٣} = ٧٢$

∴ $\frac{٨}{٣} \times ٣^{س} = ٧٢$

∴ $٣^{س} = ٣٣$ ومنها س = ٣

∴ $٣^{س+١} - ٣^{س-١} = ٧٢$

∴ $٣^{س} (٣ - \frac{١}{٣}) = ٧٢$

∴ $٣^{س} = ٧٢ \times \frac{٣}{٨} = ٢٧$

حاول أن تحل

(٤) إذا كان د$_١$(س) = $٨^{س}$، د$_٢$(س) = $٤^{س}$

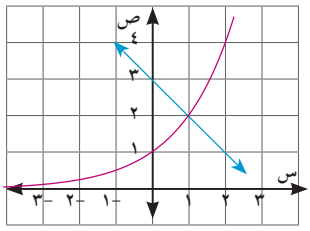
(أ) أثبت أن $\frac{د_١(٢س+١) + د_٢(٣س+٢)}{د_١(٢س-١) + د_٢(٣س-٢)} = ١٢٨$ (ب) حل المعادلة د$_١$(٢س) + د$_٢$(٣س - ١) = ٨٠

حل المعادلات بيانيًّا *Solving problems graphically*

مثال

(٤) باستخدام أحد البرامج الرسومية ارسم في شكل واحد منحنيي كل من الدالتين د$_١$(س) = $٢^{س}$، د$_٢$(س) = ٣ - س، ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة $٢^{س} = ٣ - س$

الحل



باستخدام برنامج geogebra نرسم منحنيي الدالتين، ومن الرسم إحداثيات نقطة التقاطع هي (١، ٢)

∴ مجموعة الحل = {١} ← الإحداثي السيني لنقطة التقاطع.

حاول أن تحل

(٥) باستخدام أحد البرامج الرسومية ارسم كلًّا من الدالتين:

د(س) = $٢^{س+١}$ ، ر(س) = س + ٣ في شكل واحد ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة $٢^{س+١}$ = س + ٣

تمـــاريـن الدرس الثالث

(١) اختر الإجابة الصحيحة:

أ إذا كان $٢^{س+١}$ = ٨، فإن س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٣

ب إذا كان $٥^{س-١}$ = $٤^{س-١}$، فإن س = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) -١ (د) صفر

جـ $(\frac{١}{٢})^{|أ|-٢}$ = ١ حيث أ < صفر، فإن أ = ...

(أ) ١ (ب) -٣ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢) أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $٢^{س+١}$ = ٤ ب $٣^{س-١} = \frac{١}{٩}$ جـ $٧^{س-٢}$ = ١

د $٥^{س+٣} = ٤^{س+٣}$ هـ $(\sqrt{٣})^{|س|}$ = ٢٧ و $٣^{س+٣} - ٣^{س+٢}$ = ١٦٢

ز $٥^{٢س} + ٢٥ = ٢٦ \times ٥^{س}$ ح $٢^{س} + ٢^{٥-س}$ = ١٢ ط $(\frac{١}{٢})^{س+١} + (\frac{١}{٢})^{س+٣} + (\frac{١}{٢})^{س+٥}$ = ٨٤

(٣) أوجد مجموعة حل المعادلتين:

$٣^{س} \times ٥^{ص}$ = ٧٥ ، $٣^{ص} \times ٥^{س}$ = ٤٥

(٤) إذا كانت $د_١$(س) = $٣^{س}$، $د_٢$(س) = $٩^{س}$ فأوجد قيمة س التي تحقق $د_١$(٢س-١) + $د_٢$(س+١) = ٧٥٦

(٥) إذا كانت د(س) = $٧^{س+١}$ فأوجد قيمة س التي تحقق د(٢س - ١) + د(س - ٢) = ٥٠

(٦) أوجد بيانيًّا مجموعة حل المعادلة $٣^{س-٢}$ = ٣ - س

(٧) **تفكير إبداعي:** إذا كان $س^{٣}$ = $ص^{٢}$ وكان $س^{ن+١}$ = $ص^{ن-١}$ فما قيمة ن ؟

(٨) **الربط بالأعداد:** إذا كان مجموع الأعداد ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ... + $٢^{ن}$ يُعطى بالعلاقة جـ$_{ن}$ = ٢ ($٢^{ن}$ - ١)

أ أوجد مجموع العشرة أعداد الأولى في النمط

ب أوجد عدد الحدود في النمط ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها ١٣١٠٧٠

الدرس ٤

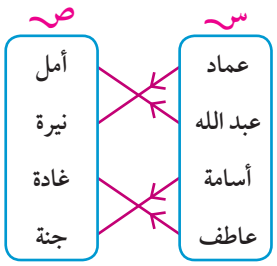
الدالة العكسية
The Inverse Function

سوف تتعلم
- الدالة العكسية.
- التمثيل البياني للدالة العكسية.
- إيجاد الدالة العكسية لدالة بيانيًا وجبريًا.

المصطلحات الأساسية
- دالة — *Function*
- دالة عكسية — *Inverse function*
- دالة أحادية — *One – to one function*
- مجال — *Domain*
- مدى — *Range*
- انعكاس — *Reflection*

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة.
- برامج رسومية.
- حاسب آلي.

فكر و ناقش



الشكل المقابل يمثل علاقة (أب) بين مجموعة من الآباء س = {عماد، عبد الله، أسامة، عاطف} وبناتهم ص = {أمل، نيرة، غادة، جنة} بالاستعانة بالشكل.

١- اكتب بيان العلاقة التي تمثل "أب" من س إلى ص
هل العلاقة تمثل دالة؟ و إذا كانت دالة هل هي دالة أحادية؟

٢- اكتب بيان العلاقة التي تمثل "إبنة" من ص إلى س هل العلاقة تمثل دالة؟

تعلم

الدالة العكسية *The inverse function*

إذا كانت الدالة د دالة أحادية (one-to-one) من مجموعة س إلى مجموعة ص، فإن الدالة د$^{-١}$ تسمى دالة عكسية للدالة د من ص إلى س إذا كان:

لكل (س، ص) ∈ د فإن (ص، س) ∈ د$^{-١}$



مثال

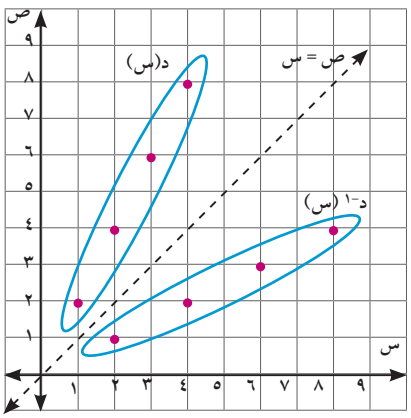
(١) إذا كانت د دالة بيانها كالآتي: د = {(١، ٢)، (٢، ٤)، (٣، ٦)، (٤، ٨)}.
أوجد الدالة العكسية للدالة د ومثلهما في شكل واحد.

الحل

حيث إن الدالة المعطاه أحادية، فإن لها معكوس

∴ د(س) = {(١، ٢)، (٢، ٤)، (٣، ٦)، (٤، ٨)}

∴ د$^{-١}$(س) = {(٢، ١)، (٤، ٢)، (٦، ٣)، (٨، ٤)}



نلاحظ أن الدالة د والدالة العكسية د$^{-١}$ متماثلان بالنسبة للمستقيم ص = س

أي أن د$^{-١}$ (س) هي صورة د(س) بالانعكاس في المستقيم ص = س

حاول أن تحل

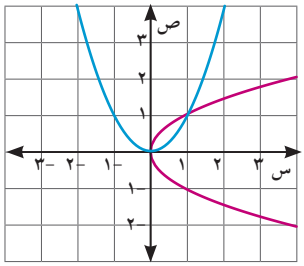
(١) أوجد الدالة العكسية للدالة التي يمثلها الجدول الآتي:

س	-٣	-٢	-١	٠	١
د(س)	٧	٣	١	٠	$\frac{١}{٢}$

لاحظ أن:

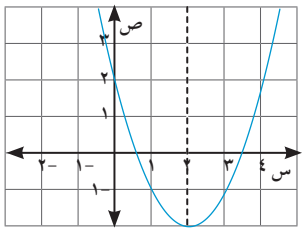
إذا كانت الدالة ليست أحادية (لا تحقق اختبار الخط الأفقي) فإن معكوسها لا يمثل دالة.

مثل ص = س^{٢} (ليست أحادية) معكوسها |ص| = $\sqrt{\text{س}}$ لا يمثل دالة.



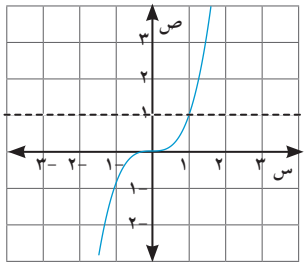
اختبار الخط الرأسي

إذا قطع أي خط رأسي المنحنى في نقطة واحدة فإن المنحنى يمثل دالة.



اختبار الخط الأفقي

إذا قطع أي خط أفقي المنحنى في نقطة واحدة، فإن المنحنى يمثل دالة أحادية.



تفكير ناقد:

ما هو مجال الدالةد حيث د(س) = س^{٢} التي يكون فيه للدالة د دالة عكسية، وأوجد هذه الدالة العكسية.

مثال

(٢) أوجد الدالة العكسية للدالة د حيث د(س) = ٢س + ١ ومثِّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا في شكل واحد.

الحل

ص = ٢س + ١

∴ س = ٢ص + ١ بتبديل المتغيرات

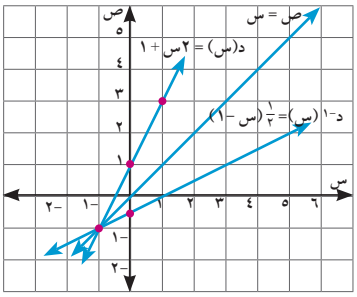
∴ ٢ص = س - ١

∴ ص = $\frac{١}{٢}$ (س - ١) أي د$^{-١}$(س) = $\frac{١}{٢}$ (س - ١)

س	١	٠	-١
د(س)	٣	١	-١
د$^{-١}$(س)	٠	$\frac{-١}{٢}$	-١

لاحظ أن

لإيجاد الدالة العكسية أولًا نقوم بتبديل المتغيرات، ثم نوجد ص بدلالة س.



نلاحظ أن الدالة د والدالة العكسية د⁻¹ منحناهما متماثلان بالنسبة للمستقيم ص = س

حاول أن تحل

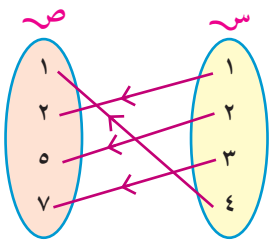
(٢) أوجد الدالة العكسية للدالة ص = س³ ومثلهما في شكل واحد.

تمـــارين الدرس الرابع

(١) أكمل:

أ إذا كانت الدالة د= {(١، ٤)، (٢، -٣)، (٣، ١)، (٤، ٠)} فإن د⁻¹ = ...

ب الشكل المقابل يمثل دالة د : سـ ⟵ صـ فإن د⁻¹ (٢) = ...



جـ صورة النقطة (٢، ١) بالانعكاس في المستقيم ص = س هي النقطة

د إذا كانت د دالة أحادية وكان د(٢) = ٦ فإن د⁻¹ (٦) = ...

هـ إذا كان د : س ⟵ ٤س فإن د⁻¹ : س ⟵

(٢) ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ:

أ مجال الدالة هو مجال الدالة العكسية لها. (.....)

ب الدالة المتزايدة على مجالها يكون دائمًا لها دالة عكسية. (.....)

جـ الدالة الزوجية يكون لها دائمًا دالة عكسية. (.....)

د الدالة الفردية يكون لها دائمًا دالة عكسية. (.....)

(٣) أوجد الدالة العكسية إذا كان:

أ د(س) = ½ س + ٤

ب د (س) = ٤س

جـ د(س) = ٥ + ٤/س

د د (س) = ٣/س

هـ د(س) = ٨ س³ - ١

و د (س) = ∛(٤ - س)

ز د(س) = ٢ + √(٣ - س)

ح د (س) = س² حيث س ≤ صفر

ط د(س) = (س - ١)² + ٢ حيث س ≤ ١

ى د(س) = س² + ٨ س + ٧ حيث س ≤ -٤

ك د(س) = √(٩ - س²) حيث -٣ ≤ س ≤ ٠

ل د(س) = √(٩ - س²) حيث ٠ ≤ س ≤ ٣

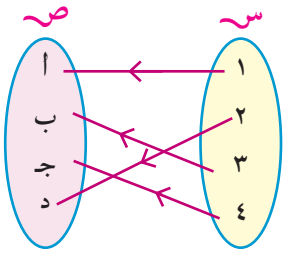
م د = {(١، ٢)، (٢، ٣)، (٣، ٤)}

و

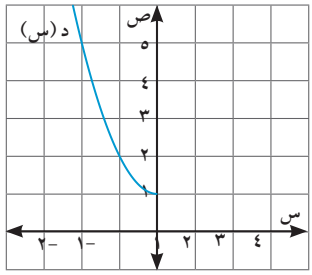
س	-٢	١	٢	٥
د(س)	٧	٤	١	-١

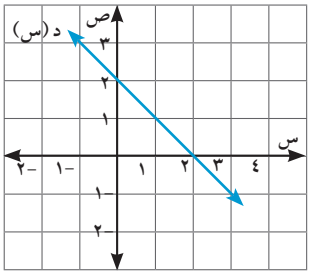
٤ أ إذا كانت د(س) = ٥س. أوجد د$^{-١}$(س) ومثلهما بيانيًّا.

ب الشكل المقابل يمثل دالة د من سـ إلى صـ فأوجد قيمة د$^{-١}$ (ب) + ٢ د$^{-١}$(جـ).



٥ في كل من الأشكال الآتية. ارسم في نفس الشكل منحنى الدالة العكسية د$^{-١}$(س)





٦ **اكتشف الخطأ:**

حاول كل من وائل ورنا إيجاد الدالة العكسية للدالة د(س) = $\frac{س - ٥}{س}$

حل وائل

∴ ص = $\frac{س - ٥}{س}$

∴ س = $\frac{ص - ٥}{س}$ بتبديل المتغيرات

∴ س^{٢} = ص − ٥ بالضرب التبادلي

∴ س^{٢} + ٥ = ص

أي د$^{-١}$(س) = س^{٢} + ٥

حل رنا

∴ ص = $\frac{س - ٥}{س}$

∴ س = $\frac{ص - ٥}{ص}$ بتبديل المتغيرات

∴ ص س = ص − ٥ بالضرب التبادلي

∴ ص س − ص = −٥

∴ ص (س − ١) = −٥

∴ د$^{-١}$(س) = $\frac{-٥}{س - ١}$

أي من الحلين هو الصواب؟ لماذا؟

٧ **سؤال مفتوح:** هل يمكن أن تكون الدالة د هي نفسها الدالة العكسية د$^{-١}$؟ إن كانت العبارة صحيحة أعط أمثلة على ذلك.

٨ أي من الدوال الآتية لها دالة عكسية:

أ د(س) = س^{٢} ب د (س) = س^{٣}

جـ د(س) = حا س د د(س) = $\frac{١}{٢}$ س

هـ د(س) = حتا س

الدرس ٥

الدالة اللوغارتمية وتمثيلها البياني

Logarithmic Function and Its Graph

سوف تتعلم

- تعريف الدالة اللوغارتمية.
- التمثيل البياني للدالة اللوغارتمية.
- التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغارتمية والعكس.
- حل بعض المعادلات اللوغارتمية البسيطة.

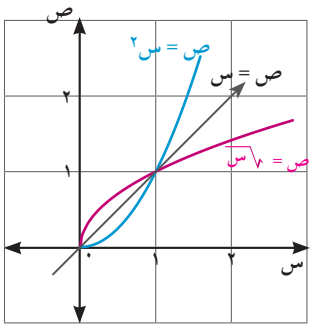
المصطلحات الأساسية

- لوغاريتم *Logarithm*
- دالة عكسية *Inverse function*
- مجال *Domain*
- اللوغاريتم المعتاد *Common logarithm*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة.
- حاسب آلي.

استكشف

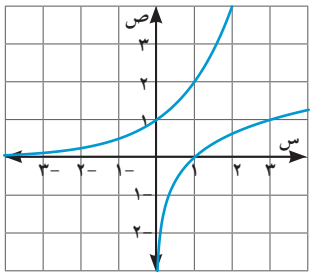


علمت أن الدالة ص = √س هي الدالة العكسية للدالة ص = س٢ لكل س ⩾ صفر (صورتها بالانعكاس في المستقيم ص = س)

فهل يمكنك تمثيل الدالة العكسية للدالة الأسية د حيث د(س) = ٢س بيانيًّا من خلال تمثيل قيم س، ص للأزواج المرتبة التي تمثل الدالة.

ص = ٢س	
س	ص
٣-	$\frac{١}{٨}$
٢-	$\frac{١}{٤}$
١-	$\frac{١}{٢}$
٠	١
١	٢
٢	٤
٣	٨

س = ٢ص	
س	ص
$\frac{١}{٨}$	٣-
$\frac{١}{٤}$	٢-
$\frac{١}{٢}$	١-
١	٠
٢	١
٤	٢
٨	٣



نجد مما سبق أن معكوس ص = ٢س هو س = ٢ص ويسمى المتغير ص في المعادلة س = ٢ص لوغاريتم س. ويكتب ص = لو س ويقرأ ص تساوي لوغاريتم س للأساس ا

تعلم

الدالة اللوغاريتمية *Logarithmic function*

إذا كان ا ∈ ع+ - {١} فإن الدالة اللوغارتمية ص = لو س هي الدالة العكسية للدالة الأسية ص = اس

مثال: إذا كان لو ٣٢ = ٥ فإن ٢٥ = ٣٢ والعكس صحيح.

تعبير شفهي:

إذا كانت النقطة (جـ، ء) ∈ للدالة ص = اس فإن:

١- النقطة (.....،) ∈ للدالة ص = لو س.

إرشادات للدراسة

تسمى لو س = ص بالصورة اللوغاريتمية

وتسمى اص = س بالصورة الأسية المكافئة لها.

فإذا كانت (-٣)٤ = ٨١

فإنه لا توجد صورة لوغاريتمية مكافئة لها.

٢- الصورة الأسية $أ^{حـ} = ء$ تكافئ الصورة اللوغارتمية

التحويل إلى الصورة اللوغارتمية:

مثال

(١) حول كل مما يأتي إلى الصورة اللوغاريتمية:

أ $\frac{١}{٨} = ٤^{-\frac{٣}{٢}}$ ب $\frac{٨١}{٦٢٥} = (\frac{٣}{٥})^{٤}$ ج $٠,٠١ = ١٠^{-٢}$

الحل

أ $-\frac{٢}{٣} = لو_{٤} \frac{١}{٨}$ ب $٤ = لو_{\frac{٣}{٥}} (\frac{٨١}{٦٢٥})$

ج $-٢ = ٠,٠١ = لو_{١٠}$

أضف إلى معلوماتك

إذا كان أساس اللوغاريتم ١٠ يسمى باللوغاريتم المعتاد ويكتب بدون أساس.

مثل: $لو_{١٠}$ ٧ تكتب لو٧

$لو_{١٠}$ ١٢٧ تكتب لو١٢٧

حاول أن تحل

(١) عبِّر عن كل مما يأتي بصورة لوغاريتمية مكافئة

أ $١٢٨ = ٢^{٧}$ ب $٣٢ = (\sqrt{٢})^{١٠}$ ج $\frac{٩}{٤} = (\frac{٢}{٣})^{-٢}$

التحويل إلى الصورة الأسية:

مثال

(٢) حوِّل كل مما يأتي إلى الصورة الأسية:

أ $٣ = لو_{٢} ٨$ ب $-٢ = لو \frac{١}{١٠٠}$ ج $١ = لو_{٥} ٥$

الحل

أ $٨ = ٢^{٣}$ ب $\frac{١}{١٠٠} = ١٠^{-٢}$ ج $٥ = ٥^{١}$

حاول أن تحل

(٢) حول كل مما يأتي إلى الصورة الأسية:

أ $١٠ = لو_{\sqrt{٣٢}} ٣٢$ ب $-٥ = لو_{٣} \frac{١}{٢٤٣}$ ج $صفر = ١ = لو_{\frac{١}{٢}}$

إيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية:

مثال

(٣) أوجد قيمة كل مما يأتي:

أ لو٠,٠٠١ ب $لو_{٣} \sqrt[٤]{٢٧}$

الحل

أ بوضع ص = لو ٠,٠٠١

بالتحويل إلى الصورة الأسية:

$١٠^{ص} = ٠,٠٠١$

$١٠^{ص} = (\frac{١}{١٠})^{٣}$ وضع العدد بالصورة الأسية

$١٠^{ص} = (١٠)^{-٣}$ من خواص الأسس

ص = -٣ لذلك فإن لو ٠,٠٠١ = -٣

ب بوضع ص = لو $\sqrt[٤]{٢٧}$

بالتحويل إلى الصورة الأسية

$٣^{ص} = ٣^{\frac{٣}{٤}}$ من خواص الأسس

$ص = \frac{٣}{٤}$

لذا فإن لو $\sqrt[٤]{٢٧} = \frac{٣}{٤}$

حاول أن تحل

٣ أوجد قيمة كل من:

أ لو ٠,٠٠٠٠١ ب لو $_{\frac{١}{٢}}$ ١٢٨

حل المعادلات

مثال

٤ أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ لو $_{٣}$ (٢س - ٥) = ١ ب لو $_{س}$ (س + ٢) = ٢

الحل

أ المعادلة معرفة لكل قيم س التي تحقق ٢س - ٥ > صفر؛ أي س > $\frac{٥}{٢}$ (مجال تعريف المعادلة)

وبتحويل المعادلة للصورة الأسية المكافئة

∴ $٣^{١} = ٢س - ٥$ ∴ ٢ س = ٨

∴ س = ٤ ∈ مجال تعريف المعادلة ∴ مجموعة الحل هي {٤}

ب المعادلة معرفة لقيم س التي تحقق

$\left.\begin{array}{l} س + ٢ > صفر \\ س > صفر \\ س \neq ١ \end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l} س > -٢ \\ س > صفر \\ س \neq ١ \end{array}\right\}$

أي]صفر، ∞[- {١} (مجال تعريف المعادلة)

وبتحويل المعادلة للصورة الأسية المكافئة

∴ $س^{٢} = س + ٢$ ∴ $س^{٢} - س - ٢ = صفر$

∴ (س - ٢) (س + ١) = صفر ∴ س = ٢ أو س = -١

∵ س = -١ ∉ مجال تعريف المعادلة ∴ مجموعة الحل = {٢}

حاول أن تحل

٤ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية

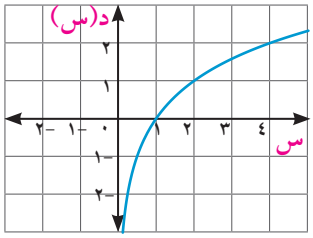
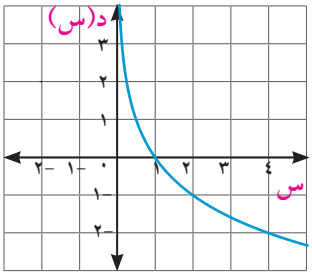
أ $\log_{٨١} س = \frac{٣}{٤}$

ب $\log_{س} ٥ = ٢$

تعلم

التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية: *Graphical representation of the logarithmic function*

تمثل الدالة د حيث د(س) = $\log_{أ}$ س حيث أ ≠ ١ بيانيًّا كما في الأشكال الآتية:

	عندما أ > ١	عندما ٠ < أ < ١
		
المجال:	ع$_+$	ع$_+$
المدى:	ع	ع
التقاطع مع محور س:	(٠، ١)	(٠، ١)
التزايد والتناقص:	تزايدية ع$_+$	تناقصية ع$_+$

مثال

٥ مثل الدوال الآتية بيانيًّا:

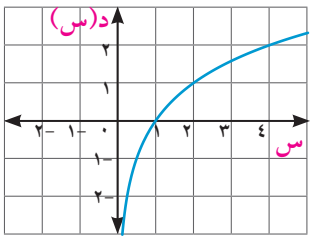
أ د(س) = $\log_{٢}$ س

ب د(س) = $\log_{\frac{١}{٢}}$ س

الحل

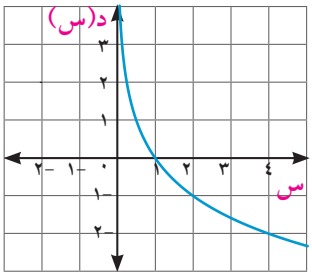
أ لاحظ أن: الأساس ٢ > ١

س	٢	١	٤
د(س)	١	٠	٢



ب لاحظ أن: الأساس: ٠ < $\frac{١}{٢}$ < ١

س	٢	١	٤
د(س)	-١	٠	-٢



استخدام الآلة الحاسبة:

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد اللوغاريتمات على النحو الآتي:

١- لإيجاد $\log_2 4$ نتبع تسلسل المفاتيح الآتية:

log 2 REPLAY 4 = 2

٢- لإيجاد $\log 38$ نتبع تسلسل المفاتيح الآتية:

log 3 8 = 1.579783597

حاول أن تحل

٥ مثل بيانيًّا الدوال الآتية:

أ $د(س) = \log_3 س$

ب $د(س) = \log_{\frac{1}{4}} س$

تمـارين الدرس الخامس

١ عبِّر عن كل مما يأتي بصورة لوغاريتمية مكافئة:

أ $٣^{-٢} = \frac{١}{٩}$ ب $(\frac{٢}{٥})^{٤} = \frac{١٦}{٦٢٥}$ ج $١ = ٥^{صفر}$ د $(\sqrt[٣]{٢})^{٤} = ٤$

٢ عبِّر عن كل مما يأتي بصورة أسية مكافئة:

أ $\log 100 = ٢$ ب $\log_2 ٤ = \frac{٥}{٢}$ ج $\log_7 ١ = صفر$ د $\log_{\sqrt[١١]{٨}} ١٢١ = ٤$

٣ عيِّن مجال الدالة د في كل مما يأتي:

أ $د(س) = \log_3 (٢س+١)$ ب $د(س) = ٢\log س$ ج $د(س) = \log_{(٥-س)} (س-٣)$

٤ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة كل من:

أ $\log_2 ١٦$ ب $\log_{\sqrt[٥]{٨}} ٥$ ج $\log_8 ١$ د $\log_3 \sqrt[٣]{٣}$

٥ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $\log_3 ٢٧ = س + ٢$ ب $\log_س (٢س + ٣) = ٢$ ج $\log (٢س + ١) = صفر$

د $\log_2 (\log_3 س) = ١$ هـ $\log_4 [١٣ + \log_2 (س-١)] = ٢$ و $\log_2 (٤^{س} - ٢) = س$

٦ مثل بيانيًّا كل من الدوال الآتية:

أ $د(س) = \log_3 س$

ب $د(س) = \log_{\frac{1}{2}} (س+١)$

س	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$
د(س)					

س	$-\frac{٧}{٨}$	$-\frac{١}{٢}$	صفر	١	٣	٧
د(س)						

٧ ارسم في شكل واحد منحنى كل من الدالتين ر، د حيث $ر(س) = \log_2 س$، $د(س) = ٦ - س$، ثم استخدم ذلك في إيجاد مجموعة حل المعادلة $\log_2 س = ٦-س$.

(٨) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

أ إذا كان لو$_{٣}$ س = ٢ فإن س = ... (٩، ٨، ٣، ٥)

ب إذا كان لو$_{أ}$ ١٦ = ٤ فإن أ ∈ ({١٦}، {٢}، {٢، -٢}، {١})

ج لو$_{٥}$ ١٢٥ = ... (٧$\sqrt{}$ ، ٣، ٥ ، ١٢٥)

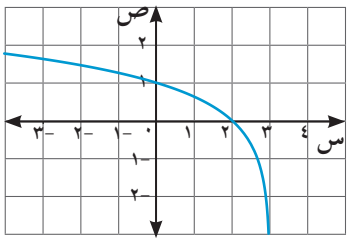
د مجال الدالة د حيث د(س) = لو$_{(١-س)}$ ٣ هو ([-∞، ٠[∪]٠، ١[،]١، ∞-[،]١، ١-[،]-∞، ١[)

هـ لو ١٠٠ = ... (١، ٢، ٣، -١)

و إذا كان منحنى الدالة د حيث د(س) = لو$_{أ}$ س يمر بالنقطة (٨، ٣): فإن د(٤) = ... (١، ٢، $\frac{١}{٤}$، -٢)

ز الشكل المقابل يمثل الدالة

(ص = ٣$^{س-١}$ ، ص = ٣$^{س+١}$ ، ص = لو$_{٣}$ (٢-س) ، ص = لو$_{٣}$ (٣-س)



(٩) **الربط بالتعليم:** إذا كانت العلاقة بين درجات تذكر أحد الطلاب بالمعلومات التي درسها في الصف الأول الثانوي وعدد الأشهر (ن) التي تبدأ من نهاية تدريس الصف هي: د(ن) = ٧٠ - ٤ لو$_{٢}$ (ن + ١)

فأوجد درجات هذا الطالب:

أولًا: في نهاية تدريس الصف الأول الثانوى (ن = ٠)

ثانيًا: بعد مرور ٧ أشهر من تدريس الصف الأول الثانوى.

(١٠) **تطبيقات:** في دراسة لقياس مدى احتفاظ الطلبة لما تم دراسته في أحد المواد يعاد امتحانهم من فترة إلى أخرى في نفس المادة. فإذا كانت درجات أحد الطلبة تتبع العلاقة د(ن) = ٨٥ - ٢٥لو(ن + ١) حيث ن عدد الشهر بعد اكتمال الدراسة، د(ن) درجة الطالب (نسبة مئوية). أوجد.

أ درجة الطالب في أول امتحان لهذه المادة.

ب درجة الطالب بعد مرور ٣ أشهر من دراسته لهذه المادة.

ج درجة الطالب بعد مرور عام كامل من دراسته لهذه المادة.

نشاط

(١١) **استخدام الحاسبة:** استخدم الحاسبة في إيجاد قيمة كل مما يأتي (مقربًا الناتج لرقمين عشريين)

أ لو ٧,٤ ب ٣لو ١٥ - ٤ لو ١٧

ج $\frac{\text{لو ٤٩}}{\text{لو ٧}}$ د لو $\frac{٢}{٣}$ + لو $\frac{٣}{٤}$ + لو $\frac{٤}{٥}$ + لو $\frac{٥}{٦}$ + لو ٣

الدرس ٦

بعض خواص اللوغاريتمات
Some Properties of Logarithms

سوف تتعلم
- استخدام بعض خواص اللوغاريتمات.
- حل المعادلات اللوغاريتمية.
- استخدام الحاسبة في حل المعادلات الأسية.
- تطبيقات حياتية على اللوغاريتمات.

المصطلحات الأساسية
- معادلة لوغاريتمية.
logarithmic equations
- مقياس ريختر.
هذافثق سذشمث

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية.
- حاسب آلي مزود ببرامج رسومية.

استكشف

باستخدام الحاسبة أوجد قيمة كل من:

١- (لو ٤ + لو ٨) ، لو ٣٢ ٢- (لو ٤٠ + لو $\frac{٥}{٢}$) ، لو ١٠٠

٣- (لو ٢٧ - لو ٩)، لو ٣ ماذا تستنتج مما سبق؟

تعلم

بعض خواص اللوغاريتمات *Some properties of logarithms*

١- لو أ = ١ ٢- لو ١ = صفر لكل أ ∈ ع$^+$ - {١}

حاول إثبات كل من ١ ، ٢ من تعريف اللوغاريتم.

٣- خاصية الضرب في اللوغاريتمات:

لو (س ص) = لو س + لو ص حيث س، ص ∈ ح$^+$

لإثبات صحة هذه الخاصية:

ضع ب = لو س ، جـ = لو ص

ومن تعريف اللوغاريتمات فإن:

س = أ^{ب} ، ص = أ^{جـ}

فتكون س ص = أ^{ب} × أ^{جـ} **أي أن** س ص = أ$^{ب+جـ}$

وبتحويل هذه الصورة إلى الصورة اللوغاريتمية تكون: لو (س ص) = ب + جـ

وبالتعويض عن قيمتي ب، جـ تكون لو (س ص) = لو س + لو ص

مثال

(١) أوجد قيمة لو ١٠ في أبسط صورة إذا كان لو ٥ ≃ ٢,٣٢١٩ ثم تحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة.

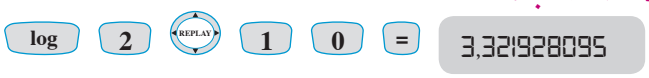
الحل

لو ١٠ = لو (٢ × ٥)

= لو ٢ + لو ٥ **باستخدام خاصية الضرب في اللوغاريتمات**

= ١ + ٢,٣٢١٩ ≃ ٣,٣٢١٩ **باستخدام الخاصية (١)، بالتعويض عن لو ٥ ≃ ٢,٣٢١٩**

التحقيق باستخدام الآلة الحاسبة:



حاول أن تحل

(١) أوجد قيمة لو$_{٣}$ ١٥ في أبسط صورة إذا كان لو$_{٣}$ ٥ ≃ ١,٤٦٥ ثم تحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة.

٤- خاصية القسمة في اللوغاريتمات:

لو$_{ا}$ $\frac{س}{ص}$ = لو$_{ا}$ س - لو$_{ا}$ ص حيث س، ص ∈ ع$_{+}$ **(حاول أن تثبت صحة العلاقة)**

مثال

(٢) أوجد قيمة المقدار: لو ٣٠ - لو ٣ .

الحل

لو ٣٠ - لو ٣ = لو $\frac{٣٠}{٣}$ = لو ١٠ = ١

حاول أن تحل

(٢) أثبت باستخدام خاصية القسمة في اللوغاريتمات أن: لو ٢ = ١ - لو ٥

٥- خاصية لوغاريتم القوة:

لو$_{ا}$ س^{ب} = ب لو$_{ا}$ س **حيث** ب ∈ ع ، س > ٠ ، ا ∈ ع$_{+}$ ، ا ≠ ١

مثال

(٣) أوجد فى أبسط صورة لو$_{٥}$ $\sqrt[٤]{١٢٥}$

الحل

لو$_{٥}$ $\sqrt[٤]{١٢٥}$ = لو$_{٥}$ (٥)$^{\frac{٣}{٤}}$ = $\frac{٣}{٤}$ لو$_{٥}$ ٥ = $\frac{٣}{٤}$ × ١ = $\frac{٣}{٤}$

لاحظ أن

$\sqrt[٤]{١٢٥} = \sqrt[٤]{٣٥} = ٥^{\frac{٣}{٤}}$

حاول أن تحل

(٣) ضع في أبسط صورة

لو$_{٣}$ $\sqrt[٧]{٢٤٣}$ ، لو$_{٧}$ $\sqrt[٤]{٣٤٣}$

٦- خاصية تغيير الأساس:

إذا كانت س ∈ ع$_{+}$ ، ص ، ا ∈ ع$_{+}$ - {١} ، أثبت أن: لو$_{ص}$ س = $\frac{\text{لو}_{ا}\ س}{\text{لو}_{ا}\ ص}$

البرهان (لا يمتحن فيه الطالب)

بوضع: ع = لو$_{ص}$ س

ص^{ع} = س — بالتحويل إلى الصورة الأسية

ع لو$_{ا}$ ص = لو$_{ا}$ س — يأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس ا

فتكون ع = $\frac{\text{لو}_{ا}\ س}{\text{لو}_{ا}\ ص}$

أي أن: لو$_{ص}$ س = $\frac{\text{لو}_{ا}\ س}{\text{لو}_{ا}\ ص}$

حاول أن تحل

٤ استخدم الخاصية السابقة في إيجاد قيمة كل من: أ لو$_{٤}$ ٨ ب لو$_{٩}$ ٢٤٣

٧- خاصية المعكوس الضربي: لو$_{ا}$ ب = $\frac{١}{\text{لو}_{ب}\ ا}$

تفكير ناقد: إذا كانت ا، ب ∈ ع$_{+}$ - {١} فأثبت أن لو$_{ا}$ ب = $\frac{١}{\text{لو}_{ب}\ ا}$ ثم استخدم ذلك لإيجاد قيمة: لو$_{٣}$ ٧ × لو$_{٧}$ ٣ في أبسط صورة.

كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المختصرة

مثال

٤ اختصر لأبسط صورة:

أ ٢لو٢٥ + لو($\frac{١}{٣}$ + $\frac{١}{٥}$) + ٢لو٣ - لو٣٠ ب لو$_{٥}$ ٤٩ × لو$_{٨}$ ٥ × لو$_{٩}$ ٨ × لو$_{٧}$ ٩

الحل

أ المقدار = لو ٢٢٥ + لو $\frac{٨}{١٥}$ + لو٢٣ - لو٣٠ — خاصية ٥

= لو ($\frac{١}{٣٠}$ × ٢٣ × $\frac{٨}{١٥}$ × ٢٢٥) — خاصية ٣، ٤

= لو ١٠٠ = ٢

ب المقدار = $\frac{\text{لو}٤٩}{\text{لو}٥} \times \frac{\text{لو}٥}{\text{لو}٨} \times \frac{\text{لو}٨}{\text{لو}٩} \times \frac{\text{لو}٩}{\text{لو}٧}$ — خاصية ٦

= $\frac{\text{لو}٤٩}{\text{لو}٧}$ = $\frac{٢\text{لو}٧}{\text{لو}٧}$ = ٢

حاول أن تحل

٥ اختصر: لو٠,٠٠٩ - لو$\frac{٢٧}{١٦}$ + لو$\frac{٥}{٨}$ ١٥ - لو$\frac{١}{١٢}$

٦ أثبت أن: $\frac{\text{لو}_{٣}٧٢٩ - \text{لو}_{٣}٦٤}{\text{لو}_{٣}٩ - \text{لو}_{٣}٤} = ٣$

٧ إذا كان $س^{٢} + ص^{٢} = ٨س ص$، أثبت أن: $٢\text{لو}_{٣}(س + ص) = ١ + \text{لو}_{٣}س + \text{لو}_{٣}ص$

حل المعادلات اللوغاريتمية *Solving logarithm equations*

مثال

٥ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $\text{لو}_{٣}(س - ١) + \text{لو}_{٣}(س + ١) = \text{لو}_{٣}٨$

ب $\text{لو}_{٣}س + \text{لو}_{س}٣ = ٢$

الحل

أ المعادلة معرفة لكل من {س: س - ١ > صفر} ∩ {س: س + ١ > صفر}

أي س > ١ (مجال تعريف المعادلة)

$\text{لو}_{٣}(س - ١) + \text{لو}_{٣}(س + ١) = \text{لو}_{٣}٨$

∴ $\text{لو}_{٣}(س - ١)(س + ١) = \text{لو}_{٣}٨$ خاصية ٣

∴ $س^{٢} - ١ = ٨$ ∴ $س^{٢} = ٩$ ومنها $س = \pm ٣$

وحيث إن س = -٣ لا تنتمي لمجال تعريف المعادلة ∴ مجموعة الحل = {٣}

ب المعادلة معرفة لكل س > صفر ، $س \neq ١$

∴ $\text{لو}_{٣}س + \frac{١}{\text{لو}_{٣}س} = ٢$ خاصية ٧

∴ $(\text{لو}_{٣}س)^{٢} + ١ = ٢\text{لو}_{٣}س$ بالضرب في $\text{لو}_{٣}س$

∴ $(\text{لو}_{٣}س)^{٢} - ٢\text{لو}_{٣}س + ١ =$ صفر ∴ $(\text{لو}_{٣}س - ١)^{٢} =$ صفر

∴ $\text{لو}_{٣}س = ١$ ∴ $س = ٣ \in$ مجال تعريف المعادلة

∴ مجموعة الحل = {٣}

حاول أن تحل

٨ أوجد مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية في ع:

أ $\text{لو}_{٣}س + \text{لو}_{٣}(س + ٢) = ١$

ب $\text{لو}(٨ - س) + ٢\text{لو}_{٨}\sqrt{س - ٦} = ٠$

ج $\text{لوس} - \text{لو}_{س}١٠٠ = ٢$

حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات *Solving exponential equations using logarithms*

مثال

٦ أوجد قيمة س فى كلٍّ مما يأتى مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

أ $٢^{س+١} = ٥$

ب $٥^{س-٢} = ٣ \times ٤^{س+١}$

الحل

أ $٢^{س+١} = ٥$ يأخذ لوغاريتم للطرفين

$\therefore$ لو $٢^{س+١}$ = لو ٥ $\therefore$ (س + ١) لو ٢ = لو ٥

$\therefore$ س + ١ = $\frac{\text{لو ٥}}{\text{لو ٢}}$ أي أن: س = $\frac{\text{لو ٥}}{\text{لو ٢}}$ - ١ $\therefore$ س $\simeq$ ١,٣٢

استخدام الآلة الحاسبة:



ب $٥^{س-٢} = ٣ \times ٤^{س+١}$ يأخذ لوغاريتم للطرفين

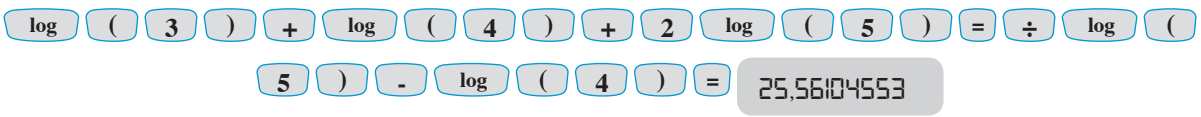
$\therefore$ لو $٥^{س-٢}$ = لو $(٣ \times ٤^{س+١})$ $\therefore$ لو $٥^{س-٢}$ = لو ٣ + لو $٤^{س+١}$

$\therefore$ (س - ٢) لو ٥ = لو ٣ + (س + ١) لو ٤ $\therefore$ س لو ٥ - ٢لو ٥ = لو ٣ + س لو ٤ + لو ٤

$\therefore$ س لو ٥ - س لو ٤ = لو ٣ + لو ٤ + ٢لو ٥ $\therefore$ س (لو ٥ - لو ٤) = لو ٣ + لو ٤ + ٢لو ٥

$\therefore$ س = $\frac{\text{لو ٣ + لو ٤ + ٢لو ٥}}{\text{لو ٥ - لو ٤}}$

استخدام الآلة الحاسبة:



حاول أن تحل

٩ أوجد قيمة س لأقرب رقم عشري واحد في كل مما يأتي:

أ $٣ \times ٢^{-٧س} = ١٣,٤$ ب $٧^{س-٢} = ٤^{س+٣}$

مثال

٧ **الربط بالجيولوجيا:** إذا كانت درجة الزلزال على مقياس ريختر تحسب بالعلاقة د = لو $\left(\frac{ش}{ش_{٠}}\right)$، حيث ش هي شدة الزلزال، $ش_{٠}$ الشدة الابتدائية، وتعرف بالمقياس الصفرى لشدة الزلزال (أقل شدة لحركة الأرض بحيث لا يسجلها المقياس).

أ أوجد على مقياس ريختر درجة الزلزال الذي شدته تعادل $١٠^{٦}$ مرة قدره الشدة الابتدائية.

ب في عام ١٩٨٩ حدث زلزال بقوة ٧,١ على مقياس ريختر. احسب شدته.

الحل

أ $\because$ د = لو $\left(\frac{ش}{ش_{٠}}\right)$ ، $ش_{٠} = ١٠^{٦}$ ش $\therefore$ د = لو $\left(\frac{١٠^{٦} ش_{٠}}{ش_{٠}}\right)$ = لو $١٠^{٦}$ = ٦ لو ١٠ = ٦

أي أن الزلزال درجته ٦ على مقياس ريختر.

ب $\because$ درجة الزلزال = ٧,١

$\therefore$ ٧,١ = لو $\left(\frac{ش}{ش_{٠}}\right)$ $\therefore$ $\frac{ش}{ش_{٠}} = ١٠^{٧,١}$ فتكون ش = $١٠^{٧,١}$ $ش_{٠}$

أي أن شدة الزلزال تعادل ١٢٥٩٠٠٠٠ مرة قدر الشدة الابتدائية.

حاول أن تحل

(١٠) إذا كان عدد سكان إحدى المدن ابتداء من عام ٢٠٠٠ يُعطى بالعلاقة ع = ٥١٠ (١,٣)$^{\text{ن}-٢٠٠٠}$ ، حيث ع عدد السكان ، ن السنة

أ احسب عدد سكان هذه المدينة عام ٢٠٠٥.

ب في أي سنة يصبح عدد سكان هذه المدينة ١,٤ مليون نسمة.

تمـارين الدرس السادس

(١) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة

أ لو ١٠٠٠ ب لو$_{٢}$ ٣٢ ج لو$_{\frac{١}{٤}}$ ١٦ د لو$_{٧}$ ٤٩

هـ لو ٠,٠٠١ و لو$_{٨}$ ٢ ز لو$_{٨}$ ١ ح لو$_{\text{ص}}$ $\sqrt[٨]{\text{ص}}$

(٢) اختصر لأبسط صورة

أ لو٢ + لو٥ ب لو$_{٥}$ ١٥ - لو$_{٥}$ ٣ ج $\frac{\text{لو}٢٥}{\text{لو}٥}$

د لو$_{٢}$ ٥ × لو$_{٥}$ ٢ هـ لو ٥٤ - ٣ لو٣ - لو٢ و ١ + لو٣ - لو٢ - لو١٥

ز لو$_{\text{ا ب جـ}}$ ا + لو$_{\text{ا ب جـ}}$ ب + لو$_{\text{ا ب جـ}}$ جـ ح $\frac{١}{\text{لو}_{٢}\ ١٢} + \frac{١}{\text{لو}_{٨}\ ١٢} + \frac{١}{\text{لو}_{٩}\ ١٢}$

(٣) علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ، حيث س ، ص ∈ ع$_{+}$ ،أ، ب ∈ ع$_{+}$ - {١} :

أ لو$_{\text{ا}}$ (س + ص) = لو$_{\text{ا}}$ س + لو$_{\text{ا}}$ ص () ب لو$_{\text{ا}}$ (س + ص) = لو$_{\text{ا}}$ س × لو$_{\text{ا}}$ ص ()

ج لو$_{\text{ا}}$ (س ص) = لو$_{\text{ا}}$ س + لو$_{\text{ا}}$ ص () د لو٢س^{٥} = ٥لو٢س ()

هـ لو$_{\text{ا}}$ $(\frac{\text{س}}{\text{ص}})$ = لو$_{\text{ا}}$ س + لو$_{\text{ا}}$ ص$^{-١}$ () و $\frac{\text{لو}_{\text{ا}}\ \text{س}}{\text{لو}_{\text{ا}}\ \text{ص}} = \frac{\text{لو}_{\text{ب}}\ \text{س}}{\text{لو}_{\text{ب}}\ \text{ص}}$ حيث أ، ب ∈ ع$_{+}$ {١} ()

ز إذا كان س > صفر فإن لو$_{\text{ا}}$ س^{٤} = ٤لو$_{\text{ا}}$ س ، أ ∈ ع -{١} ()

(٤) إذا كان لو٢ = س، لو٣ = ص أوجد بدلالة س ، ص كل من: لو٦ ، لو$_{١٨}$ ١٢

(٥) أوجد قيمة س فى كل مما يأتى مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

أ ٧ ٣س$^{-٢}$ = ٥ ب ٧ س$^{+١}$ = ٣ س$^{-٢}$ ج $\frac{٥}{١٠\ \text{س}^{٢}} = ٧$ د $\frac{٥}{\text{س}^{٣}} = ٥١٣$

٦ أوجد فى ع مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية:

أ لو$_{٤}$ س = ١ - لو$_{٤}$ (س - ٣)

ب لو$_{٣}$ (س + ٦) = ٢ لو$_{٣}$ س

ج لو (س + ٨) - لو (س - ١) = ١

د (لو س)^{٢} - لو س^{٢} = ٣

هـ س$^{\text{لو س}}$ = ١٠٠س

و ٣ لو س = ٢ لو ٣

ز لو$_{س}$ س = لو$_{٣}$ ٣

ح لو$_{٢}$ س + لو$_{س}$ ٢ = ٢

ط لو$_{٢}$ (٢^{س} - ٤) + س - ٥ = صفر

٧ استخدم الحاسبة فى إيجاد قيمة كل من:

أ لو ٣,١٥

ب لو$_{٢}$ ٢٥

ج ٢ لو ٥ - ٣ لو ٧

د $\frac{٣^{١٥٠} \times ٥^{٢٠٠}}{٧^{٢٥٠}}$

٨ استخدم الحاسبة فى إيجاد عدد أرقام العدد ٤^{٤٧٠}

٩ **الربط بالكيمياء:** يعرف الرقم الهيدروجيني للمحلول (PH) على أنه سالب لوغاريتم تركيز الهيدروجين فى المحلول (H^+) $PH = - \log (H^+)$

أ احسب الرقم الهيدروجينى لمحلول تركيز الهيدروجين فيه 10^{-3}

ب احسب تركيز الهيدروجين فى محلول رقمه الهيدروجينى 9

١٠ **تزايد سكانى:** إذا كان عدد سكان احد المدن يتزايد بمعدل سنوى قدره ٧٪

أ أوجد صيغه توضح عدد السكان بعد عام.

ب بعد كم سنة يتضاعف عدد السكان إذا استمرت الزيادة بهذا المعدل.

١١ إذا كان س = ٥ + ٢ $\sqrt{٦}$ أوجد فى أبسط صورة قيمة لو $(\frac{١}{س} + س)$

١٢ **اكتشف الخطأ:** قامت كل من أميرة و إسراء بحل السؤال اختصر : لو س^{٣} + لو ص^{٤} - لو س ص^{٢}

حل أميرة

المقدار = ٣ لو س + ٤ لو ص - ٢ لو س ص

= ٣ لو س + ٤ لو ص - ٢ (لو س + لو ص)

= ٣ لو س + ٤ لو ص - ٢ لو س - ٢ لو ص

= لو س + ٢ لو ص

حل إسراء

المقدار = لو $\frac{س^{٣} \times ص^{٤}}{س ص^{٢}}$ = لو س^{٢} ص^{٢}

= لو (س ص)^{٢} = ٢ لو س ص

= ٢ (لو س + لو ص)

أى الحلين هو الصواب؟ لماذا؟

١٣ **تفكير ابداعى:** بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة:

لو (طا ١°) + لو (طا ٢°) + لو (طا ٣°) + ... + لو (طا ٨٩°)

ملخص الوحدة

١ الجذور النونية

المعادلة $س^{ن} = أ$ حيث $أ \in ع$، $ن \in ص^{+}$ لها $ن$ من الجذور

أ $ن$ زوجي ، $أ \in ع^{+}$

يوجد جذران حقيقيان (باقي الجذور أعداد مركبة)، أحدهما موجب والآخر سالب، ويسمى الجذر الموجب بالجذر الأساسي، ويرمز له بالرمز $\sqrt[ن]{أ}$

ب $ن$ زوجي ، $أ \in ع^{-}$

ليس للمعادلة جذور حقيقية

ج $ن$ فردي ، $أ \in ع$

يوجد للمعادلة جذر حقيقي وحيد (باقي الجذور أعداد مركبة)، ويسمى هذا الجذر بالجذر الأساسي

د $ن \in ص^{+}$ ، $أ$ = صفر

يوجد للمعادلة جذر حقيقي وحيد هو الصفر.

٢ خواص الجذور النونية:

إذا كان $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب} \in ع^{-}$ فإن :

أ $\sqrt[ن]{أب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$

ب $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$ ، $ب \neq ٠$

ج $\sqrt[ن]{أ^{م}} = (\sqrt[ن]{أ})^{م} = أ^{\frac{م}{ن}}$

د $\sqrt[ن]{أ^{ن}} = |أ|$ إذا كان $ن$ زوجي $= أ$ إذا كان $ن$ فردي

٣ الأسس الكسرية $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$ حيث $\sqrt[ن]{أ} \in ع$

٤ خواص الأسس الكسرية

أ $أ^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{أ^{م}}$ حيث $أ = ع^{-} - \{٠\}$ ، $ن \in ص^{+} - \{١\}$، $م \in ص$

ب يمكن تعميم قوانين القوى الصحيحة على القوى الكسرية.

٥ الدالة الأسية: إذا كانت د: ع ⟵ ع$^{+}$ حيث د(س) = $أ^{س}$ لكل $أ \in ع^{+} - \{١\}$ فإن د تسمى دالة أسية أساسها $أ$

٦ خواص منحنى الدالة الأسية

أ مجال الدالة = ع **ب** المدى ح$^{+}$

ج الدالة متزايدة على مجالها لكل $أ > ١$ وتسمى بدالة النمو الأسي

د الدالة متناقصة على مجالها لكل $٠ < أ < ١$ وتسمى بدالة التضاؤل الأسي.

٧ المعادلة الأسية:

إذا كان $أ^{ب} = أ^{جـ}$ حيث $أ \notin \{٠، ١، -١\}$ فإن $ب = جـ$

إذا كان $أ^{ب} = ب^{جـ}$ حيث $أ، ب \notin \{٠، ١، -١\}$ فإن

إما $جـ$ = صفر أو $أ = ب$ فى حالة $جـ$ عدد فردى أو $أ = |ب|$ فى حالة $جـ$ عدد زوجى

٨ الدالة العكسية إذا كانت دالة أحادية من مجموعة سـ إلى مجموعة صـ، فإن الدالة $د^{-١}$ من صـ إلى سـ تسمى دالة عكسية للدالة د إذا كان لكل (س ، ص) ، د فإن (ص ، س) $\in د^{-١}$

٩ منحنى الدالة $د^{-١}$ هو صورة منحنى د بالانعكاس فى المستقيم ص = س .

١٠ لكى يكون للدالة د دالة عكسية يجب أن تكون د دالة أحادية أي يحقق منحنى د اختبار الخط الأفقى (إذا قطع أى مستقيم أفقى المنحنى فى نقطة واحدة فإن المنحنى يمثل دالة أحادية)

١١ الدالة اللوغاريتمية

أ إذا كانت $أ \in ع_+ - \{١\}$ فإن الدالة ص = $لو_{أ}$ س هى الدالة العكسية للدالة الأسية ص = $أ^{س}$

ب $أ^{ب} = جـ$ فإن ب = $لو_{أ}$ جـ (التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس).

جـ اللوغاريتم المعتاد : هو لوغاريتم اساسه ١٠ {لاحظ أن لو ٥ = $لو_{١٠}$ ٥ }

١٢ خواص الدالة اللوغاريتمية

أ مجال الدالة = $ع_+$ ب المدى = ع

جـ الدالة ص = $لو_{أ}$ س متزايدة لكل $أ > ١$ ومتناقصة لكل $٠ < أ < ١$

١٣ خواص اللوغاريتمات : إذا كانت $أ \in ع_+ - \{١\}$

أ $لو_{أ}$ أ = ١ ب $لو_{أ}$ ١ = صفر

جـ $لو_{أ}$ $س^{م}$ = م $لو_{أ}$ س حيث س > صفر

د $لو_{أ}$ س + $لو_{أ}$ ص = $لو_{أ}$ س ص حيث س، ص > صفر

هـ $لو_{أ}$ س - $لو_{أ}$ ص = $لو_{أ}$ $\frac{س}{ص}$ حيث س، ص > صفر

و $لو_{أ}$ س = $\frac{لو_{ب} س}{لو_{ب} أ}$ حيث س > صفر ، أ، ب $\in ع_+ - \{١\}$

ز $لو_{أ}$ س × $لو_{س}$ أ = ١

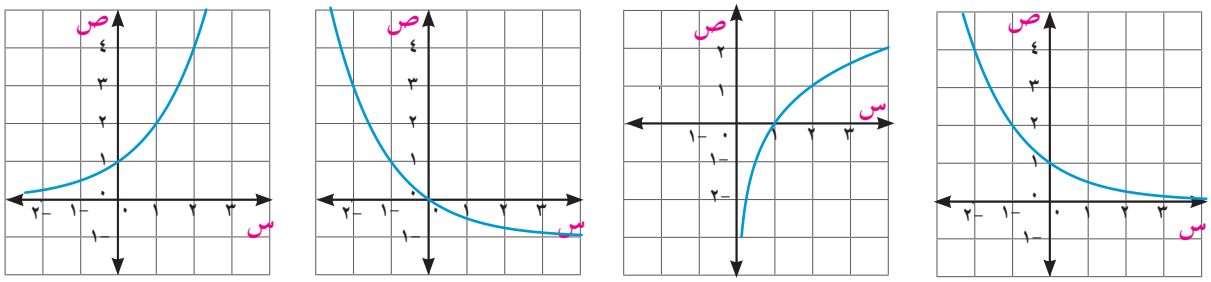
تمارين عامة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

أ إذا كان ٣ ^{س} = ٥ فإن س =

(أ) ٢ (ب) لو$_{٣}$ ٥ (جـ) لو$_{٥}$ ٣ (د) $\frac{٥}{٣}$

ب الدالة د حيث د (س) = ٢ ^{س} يمثلها الشكل البياني



(أ) (ب) (جـ) (د)

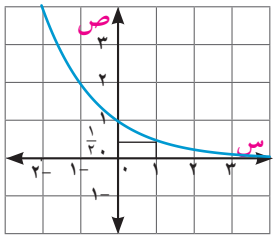
جـ لو$_{٣^{٤}}$ ٨١ =

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) -٤ (د) $\frac{٣٢}{٣}$

د $\frac{ا^{س+٢}+ا^{س+١}+ا^{س}}{ا^{س+١}+ا^{س}+ا^{س-١}}$ =

(أ) ا (ب) ا$^{-١}$ (جـ) ا^{س} (د) ١

هـ الشكل المقابل يمثل الدالة د حيث



(أ) د(س) = ٢ $^{س+١}$ (ب) د (س) = ٢ $^{-س}$

(جـ) د (س) = ٣ $^{-س}$ (د) د (س) = ٢ ^{س}

و أى مما يأتى يكافئ $\frac{٢ \text{ لو } ٧}{\text{لو } ٧ + \text{لو } ٦}$ ؟

(أ) $\frac{\text{لو } ٧}{\text{لو } ٦}$ (ب) $\frac{\text{لو } ٤٩}{\text{لو } ٤٢}$ (جـ) $\frac{٢}{\text{لو } ٦}$ (د) لو $\frac{٧}{٦}$

ز إذا كان لو$_{٢}$ (س - ٤) = ٤ فإن س =

(أ) ٤ (ب) ٢٠ (جـ) ١٦ (د) ١٨

ح لو ٠,٠١ =

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) -١ (د) -٢

ط إذا كان منحنى ص = لو$_{٤}$ (١ - ا س) يمر بالنقطة ($\frac{١}{٤}$ ، - $\frac{١}{٢}$) فإن ا =

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٨

(٢) أوجد مجموعة حل المعادلات

أ) $٥^{س-٢} = \frac{١}{١٢٥}$ ب) $(\sqrt{٣})^{س-٤} = ١$ ج) $٧^{س-٢} = ٥^{س-٢}$

د) $س^{\frac{٢}{٣}} = ٤$ هـ) $س^{لوس} = ١٠$ و) $\sqrt{لو_{٢} س} = لو_{٢} \sqrt{س}$

ز) $لو_{٢} س + لو_{٤} س = -\frac{٣}{٢}$ ح) لو (س + ٣) - لو (س + ٢) = ١

(٣) اكمل ما يأتى:

أ) إذا كان $٢^{س} = ٥$ فإن $٤^{س} =$

ب) مجال الدالة د حيث د (س) = $٣^{س}$ هو ومداها هو

جـ) مجال الدالة د حيث د (س) = $لو_{٢} س$ هو ومداها هو

د) $لو_{٣} ٥ \times لو_{٥} ٣ =$

هـ) منحنى الدالة ص = $لو_{٢}$ (٣ - س) يقطع محور السينات فى النقطة

و) إذا كان $لو_{٣} س = ٤$ فإن س = ...

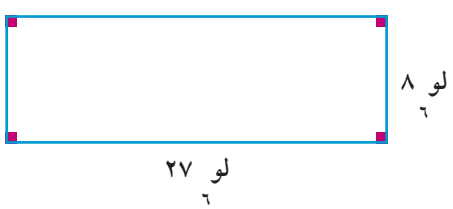
(٤) أكمل الجدول التالى مستخدمًا الحقيقة ص = $لو_{ب} س$ تكافئ $ب^{ص} = س$

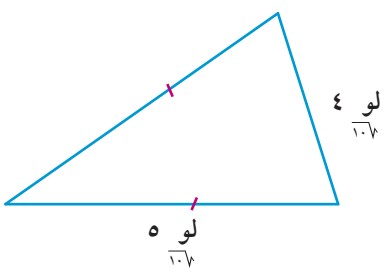
الصورة الاسية	الصورة اللوغاريتمية
$٢^{٥} = ٣٢$	
	$لو_{٣} ٨١ = ٤$
$س = ص^{ع}$	
	$لو_{١٠} = ١$
$١٦^{\frac{١}{٤}} = ٢$	
	$لو_{\frac{١}{٥}} ٢٥ = -٢$

(٥) مثِّل بيانيًّا كلًّا من الدوال

أ) د (س) = $(\frac{٣}{٢})^{س}$ ب) د (س) = $لو_{٢}$ (س + ١)

(٦) أوجد محيط كل من الأشكال الآتية فى أبسط صورة:





اختبار تراكمى

١ أوجد قيمة كل من:

أ $(-٣٢)^{\frac{٣}{٥}}$ ب $\sqrt[٤]{١٦^{-٣}}$ ج لو$_{٠,٠٩}$ $(٠,٣)^{-٢}$

٢ اختصر لأبسط صورة:

أ $\frac{٢٥ س^{٢} \times ٤ س}{١٠ س^{٢ن-١}}$ ب $\frac{٥ \times ٣^{٢ن} - ٤ \times ٣^{٢ن-١}}{٢ \times ٣^{٢ن+١} - ٣^{٢ن}}$ ج لو$_{٦}$ ٤ + ٢ لو$_{٦}$ ٣

٣ أوجد مجموعة حل المعادلة:

أ $٢^{س} = ١٠$ مقربًا الناتج لأقرب رقم عشرى. ب لو$_{٥}$ س + لو$_{٥}$ ٣ = ٢

ج $٢^{س} - ٢ س^{+١} + ٢ س^{-١} = -١$ د $س^{\frac{١٠}{٣}} - ٣٣ س^{\frac{٥}{٣}} + ٣٢ =$ صفر

٤ اختر الاجابة الصحيحة :

أ العدد $٢^{٢٤} + ٢^{٢٣} + ٢^{٢٢}$ يقبل القسمة على

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٩

ب إذا كان لو(س + ١١) = ٢ فإن س = ...

(أ) - ٩ (ب) ٢٢ (جـ) ٨٩ (د) ٩١

ج مجموع جذور المعادلة $س^{٤} = ١٦$ يساوى

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) ±٢ (د) صفر

د لو (حتا θ) + لو (قا θ) = ... حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

(أ) أ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) -١

٥ إذا كان لو(س + ص) = $\frac{١}{٢}$ (لو س + لو ص) + لو ٢ أثبت أن س = ص.

٦ **الربط بالفيزياء:** يعطى الزمن الدورى للبندول بالعلاقة ن = $٢\pi\sqrt{\frac{ل}{ع}}$، حيث ن الزمن بالثوانى، ل طول البندول بالسم، ع عجلة السقوط الحر وتساوى ٩,٨ م/ث^{٢}

أ أوجد الزمن لبندول كبير طوله ٧٣سم.

ب يراد تصنيع بندول لا يستغرق أكثر من ١٠ ثانية لاتمام دورته. كم يجب أن يكون طول البندول؟

٧ **الربط بالجيولوجيا:** تقاس قوة الهزة الأرضية بمقياس رختر، وتعطى قوة الهزة م بالعلاقة : م = لوس، حيث س سعة الموجة التى تسبب حركة الأرض. كم مرة تعادل سعة موجة هزة أرضية سجلت ١٠ درجات على مقياس رختر من سعة هزة أرضية أخرى سجلت ٧ درجات على نفس المقياس.



الوحدة الثالثة

النهايات والاتصال
Limits and Continuity

مقدمة الوحدة

ظهرت أولى أفكار حساب التفاضل والتكامل في أعمال الرياضي الإغريقي أرشميدس Archimedes ، الذي قام بوضع العديد من القوانين في الهندسة مثل: حجم ومساحة سطح الكرة، مستخدمًا في ذلك طرقًا كانت بداية لتلك الطرق المستخدمة في التكامل، وفي القرنين السادس عشر والسابع عشر الميلاديين شُغل العديد من علماء الرياضيات بمسائل تتطلب حساب التفاضل حتى قام كل من الإنجليزي نيوتن Newton والألماني لايبينز Leibniz كل على حدة باكتشاف النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل.

والتفاضل والتكامل أو الحسبان calculus هو أحد فروع الرياضيات التى تدرس النهايات والاشتقاق والتكامل والمتسلسلات اللانهائية وهو علم يستخدم لدراسة التغير في الدالة وتحليلها ويدخل علم التفاضل والتكامل في العديد من التطبيقات في الهندسة والعلوم المختلفة حيث كثيرًا ما يحتاج لدراسة سلوك الدالة والتغير فيها وحل المشاكل التي يعجز علم الجبر عن حلها بسهولة.

أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مقدمة في النهايات.
- يتعرف بعض الكميات غير المعنية مثل:

 $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $0 \times \infty$ ، ...
- يحدد طريقة إيجاد نهاية دالة:
- بالتعويض المباشر، بالتحليل، بالقسمة المطولة، بالضرب في المرافق.
- يوجد نهاية دالة مستخدمًا القانون $\lim_{س \to ا} \frac{س^ن - ا^ن}{س - ا} = ن\ ا^{ن-١}$
- يستنتج نهاية دالة مستخدمًا القانون $\lim_{س \to ا} \frac{س^ن - ا^ن}{س^م - ا^م} = \frac{ن}{م}\ ا^{ن-م}$
- يوجد نهاية دالة عند اللانهاية.
- يوجد نهايات بعض الدوال المثلثية.
- يستخدم الحاسبات البيانية للتحقق من صحة نهاية دالة وتقدير قيمة النهاية في صورة نشاط.
- يتعرف النهاية اليمنى والنهاية اليسرى للدالة عند $ا + هـ$ ، $ا - هـ$ حيث $هـ$ كمية صغيرة موجبة.
- يتعرف مفهوم اتصال الدالة.
- اتصال دالة عند نقطة – اتصال دالة على فترة – بعض أنواع الدوال المتصلة – إعادة تعريف بعض الدوال غير المتصلة لتصبح متصلة.
- يتعرف تطبيقات (تمارين وأنشطة) متنوعة على المفاهيم الأساسية لنهايات الدوال واتصالها.



المصطلحات الأساسية

كمية غير معينة	*Unspecified quantity*
غير معرف	*Undefined*
نهاية يمنى	*Right limit*
نهاية يسرى	*Left limit*
نهاية دالة	*Limit of a function*
تعويض مباشر	*direct substitution*
دالة كثيرة الحدود	*Polynomiol function*
نهاية الدالة عند اللانهاية	*Limit of a function at infinity*
دالة مثلثية	*Trigonometric function*
نهاية دالة مثلثية	*Limit of a trigonometric function*
اتصال دالة	*Continuity a function*

دروس الوحدة

الدرس (٣ - ١): مقدمة فى النهايات.

الدرس (٣ - ٢): ايجاد نهاية الدالة جبريًّا.

الدرس (٣ - ٣): نهاية الدالة عند اللا نهاية.

الدرس (٣ - ٤): نهايات الدوال المثلثية.

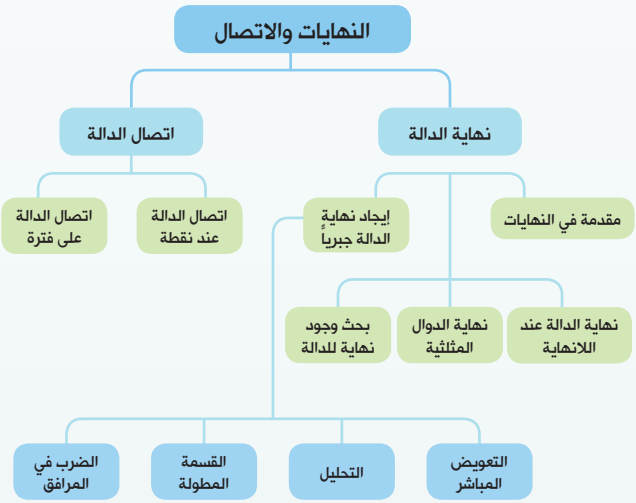
الدرس (٣ - ٥): بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة.

الدرس (٣ - ٦): الإتصال.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة - حاسب آلى - برامج رسومية

مخطط تنظيمى للوحدة



الدرس ١

مقدمة في النهايات

Introduction to limits of functions

سوف تتعلم

- الكميات غير المعينة.
- نهاية دالة عند نقطة.

المصطلحات الأساسية

- كمية غير معينة — Unspecified quantities
- غير معرف — Undefine
- مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة — *Extended real numbers*
- نهاية يمنى — Right limit
- نهاية يسرى — Left limit
- قيمة دالة — *Value of a function*
- نهاية دالة — Limit of a function

الأدوات المستخدمة

- ألة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

فكر و ناقش

أوجد ناتج العمليات الآتية إن أمكنك ذلك:

(١) ٣×٥ (٢) $٢٨ \div ٤$

(٣) $٤ - ٩$ (٤) $٧ \div ٠$

(٥) $٠ \div ٠$ (٦) $\infty + ٣$

(٧) $\infty \div \infty$ (٨) $\infty - \infty$

تذكر أن

∞ هى رمز يدل على عدد أكبر من أى عدد حقيقى يمكن تصوره أو تخيله.

الكميات غير المعينة: *Unspecified quantities*

تعلم

فى بند (فكر وناقش) نجد أن بعض نواتج العمليات محدد تمامًا مثل رقم ١ ، ٢ ، ٣ ، بينما بعض النواتج لايمكن تحديدها مثل باقى العمليات.

لاحظ أن: $٧ \div ٠$ غير معرفة حيث أن القسمة على صفر لامعنى لها.

والآن لا يمكن تحديد ناتج العملية $٠ \div ٠$

حيث يوجد عدد لا نهائى من الأعداد إذا ضرب كل منها فى صفر كان الناتج صفر لذلك فإن $\frac{٠}{٠}$ كمية غير معينة، ومن الكميات غير المعينة أيضًا:

$\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $\infty \times ٠$ (لماذا؟)

أضف إلى معلوماتك

تسمى المجموعة: ع $\cup \{-\infty ، \infty\}$ بمجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة، ويرمز لها بالرمز $\overline{ع}$، فإذا كان أ $\in \overline{ع}$ فإن:

١- $\infty = \infty + أ$ ٢- $\infty - = -\infty + أ$

٣- $\frac{أ}{\infty} = \frac{أ}{-\infty}$ = صفر

٤- $أ \times \infty = \begin{cases} \infty ، & \text{إذا كان } أ > ٠ \\ -\infty ، & \text{إذا كان } أ < ٠ \end{cases}$

٥- $أ \times -\infty = \begin{cases} \infty ، & \text{إذا كان } أ < ٠ \\ -\infty ، & \text{إذا كان } أ > ٠ \end{cases}$

مثال

(١) أوجد ناتج العمليات الآتية فى مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة إذا كان ذلك ممكنًا:

أ) $\infty + 4$ ب) $\infty - 3$ ج) $3 \div 0$ د) $-5 \div 0$

هـ) $0 + 0$ و) $0 \div 0$ ز) $\infty \times 5$ حـ) $\infty \times -6$

الحل

أ) ∞ ب) $-\infty$ ج) 0 د) غير معرفة

هـ) 0 و) كمية غير معينة ز) ∞ حـ) ∞

حاول أن تحل

(١) أوجد ناتج العمليات الآتية فى مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة إذا كان ذلك ممكنًا

أ) $(-2) \div 0$ ب) $7 \div 0$ ج) $9 \div \infty$ د) $\infty \times 0$

هـ) $(-7) \times \infty$ و) $12 + (-\infty)$ ز) $\infty + \infty$ حـ) $\infty \div \infty$

نشاط

إدرس قيم الدالة د حيث د (س) = ٢س + ١ عندما تقترب س من ٢ من خلال بيانات الجدول الآتى:

س	د(س)
٢,١	٥,٢
٢,٠١	٥,٠٢
٢,٠٠١	٥,٠٠٢
٢,٠٠٠١	٥,٠٠٠٢
.....	
↓	↓
٢	٥

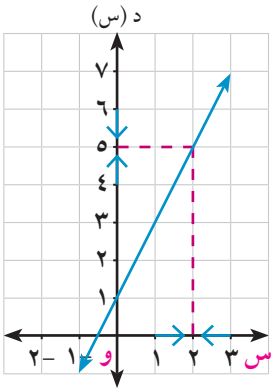
س > ٢

س ← ٢$^{+}$

س	د(س)
١,٩	٤,٨
١,٩٩	٤,٩٨
١,٩٩٩	٤,٩٩٨
١,٩٩٩٩	٤,٩٩٩٨
.....	
↓	↓
٢	٥

س < ٢

س ← ٢$^{-}$



نلاحظ أنه عندما تقترب س من العدد (٢) من اليمين أو من اليسار فإن د(س) تقترب من العدد (٥)، ونعبر عن ذلك رياضيًّا كالآتى: $\lim_{س \to 2}$ (٢ س + ١) = ٥ ويوضح ذلك التمثيل البيانى للدالة د.

تعريف

إذا كانت قيم د (س) تقترب من العدد الحقيقى ل كلما أقتربت س من العدد الحقيقى أ

فإن $\lim_{س \to أ}$ د(س) = ل

مثال

(٢) إذا كانت د(س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ فادرس قيم د(س) عندما تقترب س من ٢.

الحل

س	د(س)
٢,١	٤,٢
٢,٠١	٤,٠٢
٢,٠٠١	٤,٠٠٢
.....	
↓	↓
٢	٤

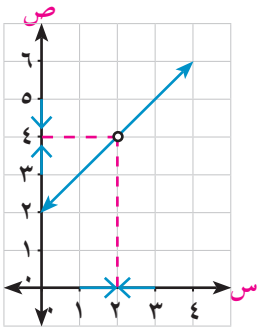
س < ٢

س ← ٢$^{+}$

س	د(س)
١,٩	٣,٩
١,٩٩	٣,٩٩
١,٩٩٩	٣,٩٩٩
.....	
↓	↓
٢	٤

س > ٢

س ← ٢$^{-}$



من الشكل البياني ومن بيانات الجدول الموضحة نجد أن د(س) ⟵ ٤ عندما س ⟵ ٢ من جهة اليمين أو من جهة اليسار أي أن د(٢$^{-}$) = د(٢$^{+}$) = ٤ ∴ نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ $\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ = ٤

لاحظ من هذا المثال أن:

١- الفجوة في الشكل البياني تعني حالة من حالات عدم التعيين ∴ عندما س = ٢

٢- وجود نهاية للدالة عندما س ⟵ ٢ لاتعني بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = ٢.

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت د(س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س + ١}$ فادرس قيم د(س) عندما تقترب س من (- ١)

مثال

(٣) إذا كانت الدالة د = ع - {١} ⟵ ع حيث: د(س) = $\begin{cases} س + ٢ & \text{لكل } س < ١ \\ س + ١ & \text{لكل } س > ١ \end{cases}$

فإرسم منحنى هذه الدالة ، وادرس قيم د(س) عندما س ⟵ ١ وابحث وجود نهـــا$_{س \leftarrow ١}$ د(س)

الحل

س	د(س)
١,١	٣,١
١,٠١	٣,٠١
١,٠٠١	٣,٠٠١
.....	
↓	↓
١	٣

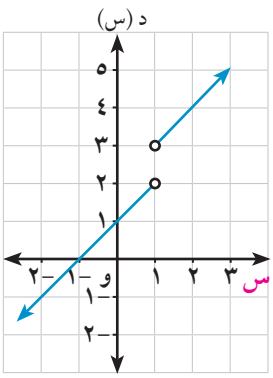
س < ١

س ← ١$^{+}$

س	د(س)
٠,٩	١,٩
٠,٩٩	١,٩٩
٠,٩٩٩	١,٩٩٩
.....	
↓	↓
١	٢

س > ١

س ← ١$^{-}$



نلاحظ من الجدول ومن الشكل البياني للدالة أن: د(س) ⟵ ٣ عندما س ⟵ ١ من جهة اليمين
د(س) ⟵ ٢ عندما س ⟵ ١ من جهة اليسار

أي أن د (١⁺) ≠ د (١⁻)

∴ نهـــا د(س) ليس لها وجود
س ← ١

لاحظ أن الفجوات في الشكل البياني تعني أن د(١) غير معرفة حيث مجال د(س) = ح - {١}

حاول أن تحل

(٣) إذا كانت د = ع - {٢} ⟵ ع حيث: د(س) = { ٣ عندما س < ٢ ; -٣ عندما س > ٢ }

فارسم منحنى هذه الدالة وادرس قيم د (س) عندما س ⟵ ٢ ثم ابحث وجود نهـــا د(س)
س ← ٢

من الأمثلة السابقة نستنتج أن:

وجود نهاية للدالة عندما س ⟵ أ لايعنى بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = أ،

والعكس إذا كانت معرفة عند س = أ فهذا لايعنى وجود نهاية للدالة عندما س ⟵ أ .

تعبير شفهي:

عبر بأسلوبك عن الفرق بين قيمة دالة عند نقطة ونهاية الدالة عند نفس النقطة.

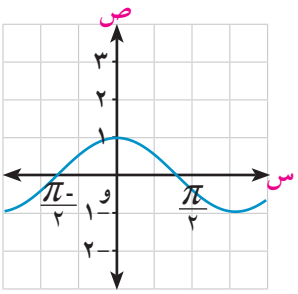
تمـــارين الدرس الأول

أولًا: تمارين على إيجاد النهاية بيانيًا:

(١) من الرسم البياني أوجد:

أ نهـــا د(س)
س ← ٠

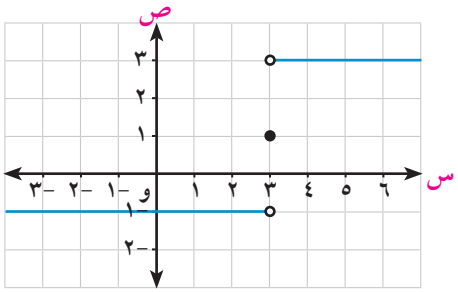
ب د(٠)



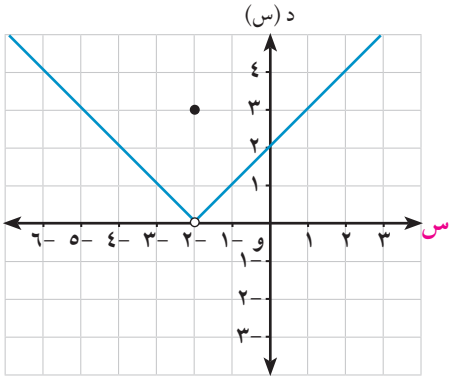
(٢) من الرسم البياني المقابل أوجد

أ نهـــا د(س)
س ← ٣

ب د(٣)



٣ من الرسم البيانى المقابل أوجد:



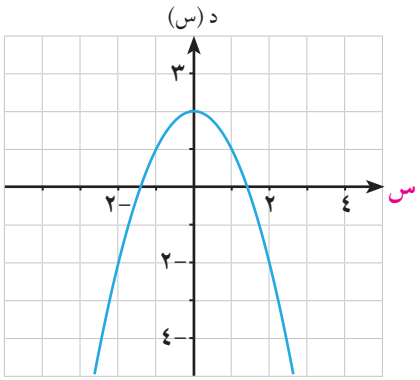
أ $\lim_{س \to -٢} د(س)$

ب د(- ٢)

جـ $\lim_{س \to ٠} د(س)$

د د(٠)

٤ من الشكل البيانى المقابل أوجد:

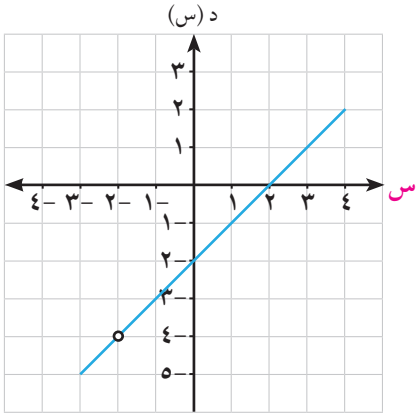


د(س) = ٢ − س^{٢}

أ $\lim_{س \to ٠} (٢ - س^{٢})$

ب د(٠)

٥ من الشكل البيانى المقابل أوجد:

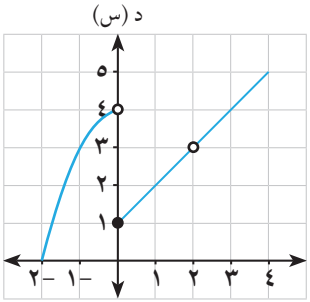


$د(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س + ٢}$

أ $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س + ٢}$

ب د(- ٢)

٦ من الشكل البيانى المقابل أوجد:



أ د (٠)

ب $\lim_{س \to ٠} د(س)$

جـ د (٢)

د $\lim_{س \to ٢} د(س)$

ثانيًا: إيجاد نهاية الدالة عدديًا:

(٧) أكمل الجدول الآتي واستنتج $\lim_{س \to ٢}$ د(س) حيث د(س) = ٥ س + ٤

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)					؟				

(٨) أكمل الجدول الآتي واستنتج $\lim_{س \to -١}$ (٣ س + ١)

س	- ٠,٩	- ٠,٩٩	- ٠,٩٩٩	←	- ١	→	- ١,٠٠١	- ١,٠١	- ١,١
د(س)					؟				

(٩) أكمل الجدول الآتي واستنتج $\lim_{س \to -١} \frac{س^٢ - ١}{س + ١}$

س	- ٠,٩	- ٠,٩٩	- ٠,٩٩٩	←	- ١	→	- ١,٠٠١	- ١,٠١	- ١,١
د(س)					؟				

(١٠) أكمل الجدول الآتي واستنتج $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{س^٢ - ٤}$

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)					؟				

(١١) إذا كانت الدالة د معرفة على ع حيث د(س) = $\begin{cases} س + ٢ & \text{لكل } س \leqslant ٠ \\ س - ١ & \text{لكل } س > ٠ \end{cases}$

ارسم منحنى هذه الدالة ثم ابحث وجود $\lim_{س \to ٠}$ د(س)

(١٢) إذا كانت الدالة د معرفة على ع حيث د (س) = $\begin{cases} ٢ & \text{عندما } س \geqslant ١ \\ س^٢ + ١ & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$

ارسم منحنى هذه الدالة ثم ابحث وجود $\lim_{س \to ١}$ د(س)

(١٣) إذا كانت الدالة د معرفة كالآتي: د(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ٩}{س + ٣} & \text{لكل } س \neq -٣ \\ ك & \text{عند } س = -٣ \end{cases}$

كون جدولًا لبحث قيم الدالة عندما س تقترب من -٣ ثم أوجد قيمة ك إذا كان د(-٣) = $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٢ - ٩}{س + ٣}$

الدرس ٢

إيجاد نهاية الدالة جبريًّا

Finding the limit of a function algebraically

سوف تتعلم

- نهاية الدالة كثيرة الحدود.
- بعض نظريات النهايات.
- استخدام القسمة المطولة فى إيجاد قيمة نهاية دالة.
- استخدام النظرية

$$\text{نهـا}_{س \to ا} \frac{س^{ن} - ا^{ن}}{س - ا} = ن ا^{ن-١}$$

المصطلحات الأساسية

- نهاية دالة *Limit of a function*
- دالة كثيرة الحدود *Polynomial function*
- تعويض مباشر *direct substitution*
- تحليل *factorization*
- قسمة تركيبية *synthetic division*
- المرافق *conjugate*

الأدوات المستخدمة

- ألة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

نشاط

استخدم أحد برامج الحاسوب الرسومية فى رسم الشكل البيانى لكل من الدالتين:

$$د_١(س) = \frac{س^{٢} - س - ٢}{س - ٢}\ ،\ د_٢(س) = س + ١$$

ماذا تلاحظ؟

أوجد: $\text{نهـا}_{س \to ٢} د_١(س)$ ، $\text{نهـا}_{س \to ٢} د_٢(س)$

ماذا تستنتج؟

تعلم

نهاية الدالة كثيرة الحدود *Limit of a polynomial function*

نظرية

إذا كانت د(س) كثيرة حدود، أ ∈ ع

فإن: $\text{نهـا}_{س \to ا} د(س) = د(ا)$

مثال

(١) أوجد نهاية كل من الدوال الآتية:

أ $\text{نهـا}_{س \to ٢} (س^{٢} - ٣س + ٥)$ ب $\text{نهـا}_{س \to ٣} (-٤)$

الحل

أ $\text{نهـا}_{س \to ٢} (س^{٢} - ٣س + ٥)$

$= ٤ - ٦ + ٥ = ٣$ (بالتعويض المباشر)

ب $\text{نهـا}_{س \to ٣} (-٤) = -٤$ لاحظ أن د(س) = -٤ ثابتة لكل قيم س ∈ ع

حاول أن تحل

(١) أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

أ $\text{نهـا}_{س \to ٣} (٢س - ٥)$ ب $\text{نهـا}_{س \to -٢} (٣س^{٢} + س - ٤)$

نظرية ٢

إذا كان $\lim_{س \to ا} د(س) = ل$ ، $\lim_{س \to ا} و(س) = م$

فإن:

١- $\lim_{س \to ا} ك\, د(س) = ك.ل$ حيث $ك \in ع$

٢- $\lim_{س \to ا} [د(س) \pm و(س)] = ل \pm م$

٣- $\lim_{س \to ا} د(س) . و(س) = ل.م$

٤- $\lim_{س \to ا} \frac{د(س)}{و(س)} = \frac{ل}{م}$ بشرط $م \neq ٠$

٥- $\lim_{س \to ا} (د(س))^{ن} = ل^{ن}$ حيث $ل^{ن} \in ع$

مثال

(٢) أوجد كل من النهايات الآتية:

أ $\lim_{س \to -١} \frac{٣س + ٧}{س^{٢} + ٢س - ٥}$

ب $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{ظا\, س}{س}$

الحل

أ $\lim_{س \to -١} \frac{٣س + ٧}{س^{٢} + ٢س - ٥} = \frac{\lim_{س \to -١} (٣س + ٧)}{\lim_{س \to -١} (س^{٢} + ٢س - ٥)} = \frac{٣ \times -١ + ٧}{(-١)^{٢} + ٢(-١) - ٥} = \frac{٤}{-٦} = \frac{-٢}{٣}$

ب $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{ظا\, س}{س} = \frac{\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} ظا\, س}{\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} س} = \frac{١}{\frac{\pi}{٤}} = \frac{٤}{\pi}$

حاول أن تحل

(٢) احسب النهايات الآتية:

أ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٣}{٢س + ١}$

ب $\lim_{س \to \pi} س\, جتا\, س$

نظرية ٣

إذا كانت $د(س) = و(س)$ لكل $س \in ع - \{ا\}$

وكانت $\lim_{س \to ا} و(س) = ل$ فإن $\lim_{س \to ا} د(س) = ل$

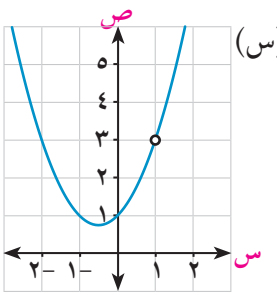
مثال

(٣) أوجد: $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} - ١}{س - ١}$

الحل

نلاحظ أن $د(س) = \frac{س^{٣} - ١}{س - ١}$ غير معينة عند $س = ١$

بالتحليل والقسمة على العوامل المتشابهة غير الصفرية فإنه يمكن كتابة $د(س)$ على الصورة.



$$د(س) = \frac{(س-١)(س^{٢}+س+١)}{(س-١)} = س^{٢}+س+١$$

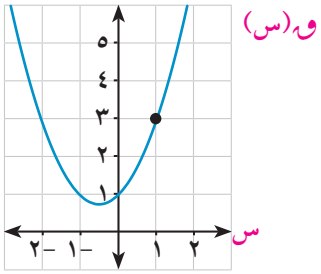
$$= و(س)$$

من ذلك نجد إن د(س) = و(س) لكل س ≠ ١

وحيث أن $\lim_{س \to ١}$ و(س) = ٣

فإنه طبقًا **للنظرية ٣ نستنتج أن** $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ٣

$$\therefore \lim_{س \to ١} \frac{س^{٣}-١}{س-١} = ٣$$



حاول أن تحل

(٣) أوجد: (أ) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٣}+٨}{س+٢}$ (ب) $\lim_{س \to ٤} \frac{٢س-٨}{س^{٢}-س-١٢}$

ارشاد للحل

في عملية القسمة المطولة

(١) ترتيب حدود كل من المقسوم والمقسوم عليه ترتيبًا تصاعديًا أو تنازليًا بنفس الطريقة.

(٢) نقسم الحد الأول من المقسوم على الحد الأول من المقسوم عليه ونكتب ناتج القسمة.

(٣) نضرب ناتج القسمة في المقسوم عليه ويطرح الناتج من المقسوم للحصول على الباقي.

(٤) نستمر بنفس الطريقة حتى الانتهاء من عملية القسمة.

مثال

(٤) أوجد:

$$\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣}-٢س^{٢}+١}{س^{٢}+س-٢}$$

الحل

نجد أن دالة البسط د(س) = ٠ وذلك بالتعويض عن س = ١، كذلك دالة المقام و(س) = ٠ بالتعويض أيضًا عن س = ١ وهذا يعني أن العامل (س - ١) مشترك في كل من البسط والمقام، ونظرًا لصعوبة تحليل دالة البسط إلى عوامل أحدها (س - ١) نستخدم القسمة المطولة لنوجد العامل الآخر للمقدار س^{٣} - ٢س^{٢} + ١ كالآتي:

س^{٣} - ٢س^{٢} + ١		س - ١
س^{٣} - س^{٢}		س^{٢} - س - ١
٠ - س^{٢} + ١		
- س^{٢} + س		
٠ - س + ١		
- س + ١		
صفر		

يمكن استخدام طريقة مبسطة لإجراء عملية القسمة تسمى طريقة القسمة التركيبية

نستخدم في هذه الطريقة معاملات كثيرات الحدود فنكتب معاملات المقسوم مرتبة تنازليًا وتساوى المقسوم عليه بالصفر للحصول على قيمة س كما بالشكل:

المعاملات	١	-٢	٠	١	قيمة س ١
+ نواتج الضرب		٠	١-	١-	
معاملات خارج القسمة	١	١-	١-	٠	

نجد أن معاملات خارج القسمة هي: ١ ، - ١ ، -١ على الترتيب لذلك فإن خارج القسمة هو $س^{٢} - س - ١$

أي أن: $س^{٣} - ٢س^{٢} + ١ = (س - ١)(س^{٢} - س - ١)$

لذلك فإن:

$$\text{نهـــا}_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س^{٢} - س - ١)}{(س - ١)(س + ٢)} = \text{نهـــا}_{س \to ١} \frac{س^{٢} - س - ١}{س + ٢} = -\frac{١}{٣}$$

حاول أن تحل

(٤) أ $\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - س^{٢} - ٥س + ٦}{س - ٢}$ ب $\text{نهـــا}_{س \to -٣} \frac{س^{٣} - ١٠س - ٣}{س^{٢} + ٢س - ٣}$

مثال

استخدام المرافق *Conjugate*

(٥) أوجد النهايات الآتية:

أ $\text{نهـــا}_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س - ٣} - ١}{س - ٤}$ ب $\text{نهـــا}_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt{س + ٤} - ٣}$

الحل

لاحظ أن: $و(س) = \sqrt{س - ٣} - ١$ أي أن: $و(٤) = ٠$

$ع(س) = س - ٤$ أي أن: $ع(٤) = ٠$

أ $\therefore \frac{و(٤)}{ع(٤)} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (كمية غير معينة)

لذلك نبحث عن طرق نتخلص بها من العامل، (س - ٤) من كل من البسط و المقام.

$$\text{نهـــا}_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س - ٣} - ١}{س - ٤} \times \frac{\sqrt{س - ٣} + ١}{\sqrt{س - ٣} + ١} = \text{نهـــا}_{س \to ٤} \frac{س - ٣ - ١}{(س - ٤)(\sqrt{س - ٣} + ١)}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)}{(س - ٤)(\sqrt{س - ٣} + ١)}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٤} \frac{١}{\sqrt{س - ٣} + ١} = \frac{١}{٢}$$

ب $\text{نهـــا}_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt{س + ٤} - ٣} = \text{نهـــا}_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt{س + ٤} - ٣} \times \frac{\sqrt{س + ٤} + ٣}{\sqrt{س + ٤} + ٣}$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٥} \frac{س(س - ٥)(\sqrt{س + ٤} + ٣)}{س + ٤ - ٩} = \text{نهـــا}_{س \to ٥} \frac{س(س - ٥)(\sqrt{س + ٤} + ٣)}{(س - ٥)}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٥} س(\sqrt{س + ٤} + ٣) = ٥(٣ + ٣) = ٣٠$$

حاول أن تحل

(٥) أوجد النهايات الآتية:

أ $\text{نهـــا}_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥}$ ب $\text{نهـــا}_{س \to -١} \frac{س + ١}{\sqrt{س + ٥} - ٢}$

نظرية ٤

$$\text{نهـــا}_{س \to ا} \frac{س^ن - ا^ن}{س - ا} = ن \, ا^{ن-١}$$

مثال

(٦) $\text{نهـــا}_{س \to ١} \frac{س^{١٩} - ١}{س - ١}$

الحل

$$= \text{نهـــا}_{س \to ١} \frac{س^{١٩} - ١^{١٩}}{س - ١} = ١٩ \times ١^{١٨} = ١٩$$

نتائج

نتائج على النظرية:

١- $\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{(س + ا)^ن - ا^ن}{س} = ن \, ا^{ن-١}$

٢- $\text{نهـــا}_{س \to ا} \frac{س^ن - ا^ن}{س^م - ا^م} = \frac{ن}{م} ا^{ن-م}$

مثال

(٧) أوجد:

أ $\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{(س + ٥)^٤ - ٦٢٥}{س}$

ب $\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٣٢}{س^٢ - ٤}$

ج $\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{(س - ٤)^٥ + ٣٢}{س - ٢}$

د $\text{نهـــا}_{س \to ١٦} \frac{\sqrt[٤]{س^٥} - ٣٢}{\sqrt[٨]{س^٣} - ٦٤}$

الحل

أ $= \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{(س + ٥)^٤ - ٥^٤}{س} = ٤ \times ٥^٣ = ٥٠٠$

ب $= \text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٢^٥}{س^٢ - ٢^٢} = \frac{٥}{٢} \times ٣٢ = ٢٠$

ج $\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{(س - ٤)^٥ + ٣٢}{س - ٢} = \text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{(س - ٤)^٥ - (-٢)^٥}{(س - ٤) - (-٢)}$

$= ٥ (-٢)^٤ = ٨٠$

د $\text{نهـــا}_{س \to ١٦} \frac{\sqrt[٤]{س^٥} - ٣٢}{\sqrt[٨]{س^٣} - ٦٤} = \text{نهـــا}_{س \to ١٦} \frac{س^{\frac{٥}{٤}} - (١٦)^{\frac{٥}{٤}}}{س^{\frac{٣}{٢}} - (١٦)^{\frac{٣}{٢}}}$

$= \frac{\frac{٥}{٤}}{\frac{٣}{٢}} \times (١٦^{\frac{٥}{٤} - \frac{٣}{٢}}) = \frac{٥}{٦} \times ١٦^{-\frac{١}{٤}} = \frac{٥}{١٢}$

لاحظ أن

$١٦^{\frac{٥}{٤}} = (٤٢)^{\frac{٥}{٤}} = ٤٢^{\frac{٥}{٤}} \times$

$= ٥٢ = ٣٢$

كذلك فإن:

$١٦^{\frac{٣}{٢}} = ٦٤$

حاول أن تحل

(٦) أوجد:

أ $\text{نهـــا}_{س \to -٥} \frac{س^٤ - ٦٢٥}{س + ٥}$

ب $\text{نهـــا}_{س \to ١٦} \frac{\sqrt[٤]{س^٧} - ١٢٨}{س - ١٦}$

ج $\text{نهـــا}_{س \to ٧} \frac{\sqrt[٣]{س + ٢٥} - ٢}{س - ٧}$

تمـــارين الدرس الثاني

أكمل ما يأتي:

(١) $\lim_{س \to ٢}$ (٣س - ١) = ...

(٢) $\lim_{س \to ١} \frac{س - ٣}{س + ١}$ = ...

(٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٢} - س}{س}$ = ...

(٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ = ...

(٥) $\lim_{س \to ١} \frac{|س^{٥} - ١|}{س - ١}$ = ...

(٦) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{س} - \sqrt[٣]{٢}}{س - ٢}$ = ...

(٧) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{\frac{١}{٣}} - ١}{س^{٤} - ١}$ = ...

(٨) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{-١} - ٢^{-١}}{س^{-٣} - ٢^{-٣}}$ = ...

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٩) $\lim_{س \to -١} \frac{س^{٣} - ١}{س + ١}$ تساوى

أ) -٣ ب) -٢ ج) ٣ د) ليس للدالة نهاية

(١٠) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جا س}{س}$ تساوى

أ) ١ ب) $\frac{\pi}{٢}$ ج) $\frac{٢}{\pi}$ د) ليس للدالة نهاية

(١١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{طا س}{س}$ تساوى

أ) ٠ ب) ١ ج) $\frac{٤}{\pi}$ د) ليس للدالة نهاية

(١٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٥} - ٢٤٣}{س^{٣} - ٢٧}$ تساوى

أ) ٠ ب) $\frac{٥}{٣}$ ج) ١٥ د) ٩

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن وجدت)

(١٣) $\lim_{س \to ٣} (س^{٢} - ٣س + ٢)$

(١٤) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٢} + ١}{س - ٣}$

(١٥) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} (٢س - جا س)$

(١٦) $\lim_{س \to \pi} \frac{جتا ٢س}{س}$

(١٧) $\lim_{س \to -١} \frac{س + ١}{س^{٣} + ١}$

(١٨) $\lim_{س \to ٩} \frac{٩ - س}{س^{٢} - ٨١}$

(١٩) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٧س + ١٠}{س^{٢} - ٢س}$

(٢٠) $\lim_{س \to -١} \frac{س^{٢} + ٦س + ٥}{س^{٢} - ٣س - ٤}$

(٢١) $\lim_{س \to ٩} \frac{س + \sqrt[٣]{س} - ١٢}{س - ٩}$

(٢٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{١}{٢ + س} - \frac{١}{٢}}{س}$

(٢٣) $\lim_{س \to -٢} \frac{س + ٢}{س^{٤} - ١٦}$

(٢٤) $\lim_{س \to ١} (\frac{٢}{س} + \frac{س^{٢} - س}{س - ١})$

(٢٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٢س + ٤}{س^{٣} - ٤س}$

(٢٦) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^{٣} - ٤س^{٢} - س + ٤}{٢س^{٢} - ٧س - ٤}$

(٢٧) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٩}{س^{٣} - ٢س^{٢} + ٢س - ١٥}$

(٢٨) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س - ٢}$

(٢٩) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{-٨} - (١٦)^{-٢}}{س - ٢}$

(٣٠) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٧]{س} - ١}{س - ١}$

(٣١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{-٩} - \frac{١}{٥١٢}}{س - ٢}$

(٣٢) $\lim_{س \to \sqrt[٥]{٢}} \frac{س^{٧} - \sqrt[٥]{١٢٥}}{س^{٤} - \sqrt[٥]{٢٥}}$

(٣٣) $\lim_{س \to ٨١} \frac{\sqrt[٤]{س} - ٣}{س - ٨١}$

(٣٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٧} - ١٢٨}{س^{٥} - ٣٢}$

(٣٥) $\lim_{س \to ٦} \frac{(س - ٥)^{٧} - ١}{س - ٦}$

(٣٦) $\lim_{س \to ٧} \frac{\sqrt[٣]{س + ٢٥} - ٢}{س - ٧}$

(٣٧) $\lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٣)^{٦} - ١}{س - ٢}$

(٣٨) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(س - ٢هـ)^{١٧} - س^{١٧}}{٥١ هـ}$

(٣٩) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^{٤} - ٨١}{س^{٥} + ٢٤٣}$

(٤٠) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(٣ + هـ)^{٤} - ٨١}{٦ هـ}$

(٤١) $\lim_{س \to -١} \frac{\sqrt[٣]{س^{٢} + ٨} - ٣}{س + ١}$

(٤٢) $\lim_{س \to -٣} \frac{\sqrt[٣]{س + ٧} - ٢}{س + ٣}$

(٤٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt[٣]{س + ١} - ٢}{\sqrt[٣]{س + ٦} - ٣}$

(٤٤) $\lim_{س \to -١} \frac{س^{٢} - س - ٢}{س + ١}$

(٤٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{(٢س - ١)^{٢} - ١}{٥س}$

(٤٦) $\lim_{س \to ١} \left(\frac{١}{س - ١} - \frac{٣}{س^{٣} - ١}\right)$

(٤٧) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٢} + ٤س + ٤}{س^{٣} + س^{٢} - ٨س - ١٢}$

(٤٨) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt[٣]{٢س + ١} - ٣}{س - ٤}$

نشاط

(٤٩) **الربط بالحجم** صنعت علبة مفتوحة من أعلى من ورق مقوى على شكل مربع طول ضلعه ٢٤سم وذلك بقطع مربعات متساوية من أركانها الأربعة. طول ضلع كل منها س سم.

أولًا: ارسم شكلًا توضيحيًا للعلبة. **ثانيًا:** أثبت أن حجم العلبة يعطى بالعلاقة ع = س(٢٤ - ٢ س)^{٢}

ثالثًا: أثبت أن حجم العلبة يكون أكبر ما يمكن عندما س = ٤ وذلك بدراسة قيم الدالة عندما س ← ٤ مستخدمًا الجدول التالى:

س	٣	٣,٥	٣,٩	←	٤	→	٤,١	٤,٥	٥
ع				←		→			

رابعًا: استخدم أحد البرامج الرسومية لرسم العلاقة والتحقق من أن القيمة العظمى للحجم توجد عند س = ٤

تفكير إبداعي:

(٥٠) إذا كان $\lim_{س \to ٢} \frac{د(س) - ٥}{س - ٢} = ١$ فأوجد: $\lim_{س \to ٢}$ د(س)

(٥١) إذا كان $\lim_{س \to ٠} \frac{د(س)}{س^{٢}} = ٥$ فأوجد:

أ $\lim_{س \to ٠}$ د(س)

ب $\lim_{س \to ٠} \frac{د(س)}{س}$

الدرس ٣

نهاية الدالة عند اللانهاية
Limit of the function at Infinity

سوف تتعلم
- نهاية الدالة عند اللانهاية.
- إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية باستخدام الحل الجبرى.
- إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية باستخدام الحل البياني.

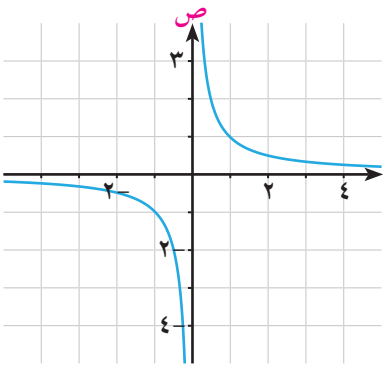
المصطلحات الأساسية
- نهاية دالة عند اللانهاية.

Limit of afunction at infinity

الأدوات المستخدمة
- ألة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

نحتاج فى كثير من التطبيقات العملية والحياتية إلى معرفة سلوك الدالة د(س) عندما س ⟵ ∞ والنشاط التالى يوضح ذلك.

نشاط



استخدم أحد برامج الحاسوب فى رسم الدالة د حيث: د(س) = $\frac{١}{س}$ ، س > ٠

ماذا تلاحظ من منحنى الشكل إذا ازدادت قيم س الموجبة حتى تقترب من ما لانهاية؟

من الشكل المرسوم **نلاحظ أن:**

- كلما زادت قيم س واقتربت من مالا نهاية اقتربت قيم د(س) من الصفر، لذلك نقول أن نهاية د(س) عندما تقترب س من ما لانهاية تساوى صفر.

تعلم

نهاية دالة عند اللانهاية
Limit of a function at infinity

نظرية ١

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \frac{١}{س} = ٠$$

نتيجة

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \frac{أ}{س^{ن}} = ٠ \quad \{\text{حيث ن} \in ع^{+} ، أ \text{ ثابت}\}$$

قواعد أساسية:

- $\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty}$ جـ = جـ ، حيث جـ ثابت
- إذا كان ن عددًا صحيحًا موجبًا فإن $\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty}$ س^{ن} = ∞

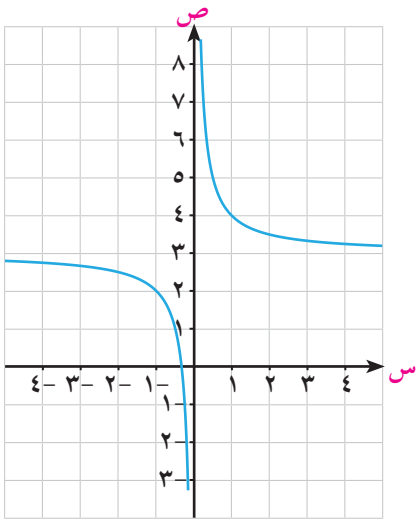
لاحظ أن: نظرية (٢) المتعلقة بنهاية مجموع أو فرق أو ضرب أو قسمة دالتان عند س ⟵ أ السابق دراستها في الدرس السابق صحيحة عندما نضع س ⟵ ∞ بدلًا من س ⟵ أ

مثال

(١) أوجد:

(أ) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{١}{س} + ٣\right)$ (ب) $\lim_{س \to \infty} \left(٤ - \frac{٣}{س^{٢}}\right)$

➢ ثم تحقق من ذلك بيانيًّا باستخدام أحد البرامج الرسومية.



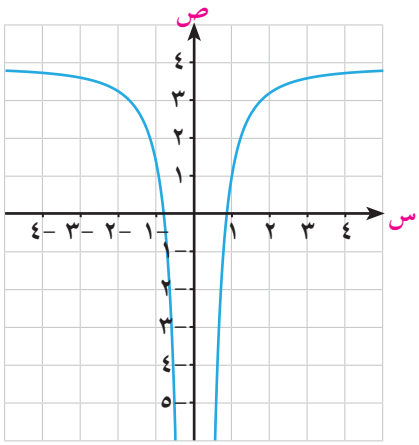
الحل

(أ) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{١}{س} + ٣\right) = \lim_{س \to \infty} \frac{١}{س} + \lim_{س \to \infty} ٣$

$= ٠ + ٣ = ٣$

$\therefore \lim_{س \to \infty} \left(\frac{١}{س} + ٣\right) = ٣$

(ب) $\lim_{س \to \infty} \left(٤ - \frac{٣}{س^{٢}}\right) = \lim_{س \to \infty} ٤ - \lim_{س \to \infty} \frac{٣}{س^{٢}}$



$= ٤ - ٣ \quad \lim_{س \to \infty} \frac{٣}{س^{٢}} = ٤ - ٣ \times ٠ = ٤$

$\therefore \lim_{س \to \infty} \left(٤ - \frac{٣}{س^{٢}}\right) = ٤$

حاول أن تحل

(١) أوجد:

(أ) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{٥}{س} + ٢\right)$ (ب) $\lim_{س \to \infty} \left(٥ + \frac{٢}{س^{٢}}\right)$

مثال

(٢) أوجد: $\lim_{س \to \infty} (س^{٣} + ٤ س - ٥)$

الحل

$\lim_{س \to \infty} (س^{٣} + ٤س - ٥) = \lim_{س \to \infty} س^{٣} \left(١ + \frac{٤}{س^{٢}} - \frac{٥}{س^{٣}}\right)$ وذلك بأخذ $س^{٣}$ عامل مشترك

$= \lim_{س \to \infty} س^{٣} \times \lim_{س \to \infty} \left(١ + \frac{٤}{س^{٢}} - \frac{٥}{س^{٣}}\right) = \infty \times ١ = \infty$

حاول أن تحل

(٢) أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

أ $\lim_{س \to \infty}$ (س^{٣} + ٧س^{٢} + ٢)

ب $\lim_{س \to \infty}$ (٤ - ٣س - س^{٣})

مثال

(٣) أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

أ $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س - ٣}{٣س^{٢} + ١}$

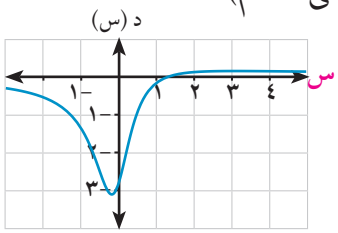
ب $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^{٢} - ٣}{٣س^{٢} + ١}$

ج $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^{٣} - ٣}{٣س^{٢} + ١}$

الحل

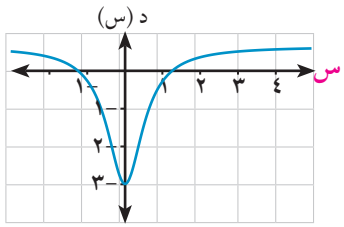
فى كل الحالات تقسم كل من البسط والمقام على س^{٢} (أعلى قوة للمتغير س فى المقام).

أ $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س - ٣}{٣س^{٢} + ١} = \frac{\lim_{س \to \infty} (\frac{٢}{س} - \frac{٣}{س^{٢}})}{\lim_{س \to \infty} (٣ + \frac{١}{س^{٢}})} = \frac{٠ - ٠}{٠ + ٣} = ٠$



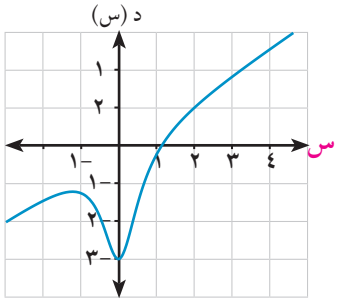
ب $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^{٢} - ٣}{٣س^{٢} + ١} = \frac{\lim_{س \to \infty} (٢ - \frac{٣}{س^{٢}})}{\lim_{س \to \infty} (٣ + \frac{١}{س^{٢}})}$

$= \frac{٠ - ٢}{٠ + ٣} = \frac{٢}{٣}$



ج $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^{٣} - ٣}{٣س^{٢} + ١} = \frac{\lim_{س \to \infty} (٢س - \frac{٣}{س^{٢}})}{\lim_{س \to \infty} (٣ + \frac{١}{س^{٢}})}$

$= \frac{\infty - ٠}{٠ + ٣} = \infty$



نستنتج من هذا المثال أن: عند إيجاد $\lim_{س \to \infty} \frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث كل من د(س)، ر(س) دوال كثيرات الحدود فإن:

- النهاية تعطى عددًا حقيقيًّا لايساوى الصفر إذا كانت درجة البسط = درجة المقام.
- النهاية تساوى صفرًا إذا كانت درجة البسط < درجة المقام.
- النهاية تعطى ± ∞ إذا كانت درجة البسط > درجة المقام.

حاول أن تحل

(٣) أوجد:

أ $\lim_{س \to \infty} \frac{٥س^{٢} - ٣س + ١}{٢س}$

ب $\lim_{س \to \infty} \frac{٤س^{٣} - ٥س}{٨س^{٤} + ٣س^{٢} - ٢}$

ج $\lim_{س \to \infty} \frac{-٦س^{٢} + ١}{٣س^{٢} + س - ٢}$

مثال

(٤) أوجد النهايات الآتية:

أ $\lim_{س \to -\infty} \frac{س^٣ - ٢}{|س|^٣ + ١}$

ب $\lim_{س \to -\infty} (س - \sqrt[٣]{س^٢ + ٤})$

الحل

أ $\lim_{س \to -\infty} \frac{س^٣ - ٢}{|س|^٣ + ١}$

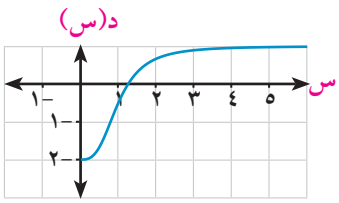
∵ س ⟵ $-\infty$

∴ س < ٠ أى أن |س| = −س

∴ $\lim_{س \to -\infty} \frac{س^٣ - ٢}{-س^٣ + ١}$

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$

$= \frac{\lim_{س \to -\infty} (١ - \frac{٢}{س^٣})}{\lim_{س \to -\infty} (-١ + \frac{١}{س^٣})} = \frac{١ - ٠}{-١ + ٠} = -١$



$د(س) = \frac{س^٣ - ٢}{|س|^٣ + ١}$

ب $\lim_{س \to -\infty} (س - \sqrt[٣]{س^٢ + ٤})$

$= \lim_{س \to -\infty} \frac{(س - \sqrt[٣]{س^٢ + ٤})}{١} \times \frac{(س + \sqrt[٣]{س^٢ + ٤})}{(س + \sqrt[٣]{س^٢ + ٤})}$

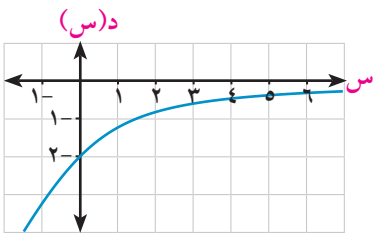
$= \lim_{س \to -\infty} \frac{س^٢ - س^٢ - ٤}{س + \sqrt[٣]{س^٢ + ٤}}$

$= \lim_{س \to -\infty} \frac{-٤}{س + \sqrt[٣]{س^٢ + ٤}}$

∵ س ⟵ $-\infty$

∴ س < ٠ ⟵ $\sqrt[٣]{س^٢} = |س| = -س$ بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt[٣]{س^٢}$

∴ $\lim_{س \to -\infty} \frac{-٤}{س + \sqrt[٣]{س^٢ + ٤}} = \frac{\lim_{س \to -\infty} -\frac{٤}{س}}{\lim_{س \to -\infty} (-١ + \sqrt[٣]{\frac{٤}{س^٢}} + ١)} = \frac{٠}{-١ + ١} = ٠$



$د(س) = س - \sqrt[٣]{س^٢ + ٤}$

حاول أن تحل

(٤) أوجد النهايات الآتية:

أ $\lim_{س \to -\infty} \frac{س - ٣}{\sqrt[٣]{٤س^٢ + ٢٥}}$

ب $\lim_{س \to -\infty} (\sqrt[٣]{٣س^٢ + ٥س} - \sqrt[٣]{٣} س)$

تمـــاريـن الدرس الثالث

أكمل ما يأتى:

(١) $\lim_{س \to \infty} (١ + \frac{٣}{س}) =$

(٢) $\lim_{س \to \infty} (٢ - \frac{٣}{س^{٢}}) =$

(٣) $\lim_{س \to \infty} (-٧) =$

(٤) $\lim_{س \to \infty} (س^{٢} - ٣) =$

(٥) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س + ١}{س}$

(٦) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٣} - ٥}{س^{٢} + ١} =$

(٧) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٥} + ٣}{س^{٣} - ٥} =$

(٨) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س}{\sqrt{٨ س^{٢} - ١}} =$

(٩) $\lim_{س \to \infty} (٣ - \frac{٧}{س} + \frac{٤}{س^{٢}}) =$

(١٠) $\lim_{س \to \infty} (\sqrt{٨ س^{٢} + ١} - س) =$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١١) $\lim_{س \to \infty} \frac{٦س}{٢س + ٣}$ تساوى

أ صفر ب ٢ جـ ٣ د ∞

(١٢) $\lim_{س \to \infty} \sqrt{\frac{٤}{س} + ١}$

أ صفر ب ١ جـ ٢ د ∞

(١٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{س + ٣}{٢ - س^{٢}}$

أ صفر ب $\frac{١}{٢}$ جـ $\frac{٣}{٢}$ د ∞

(١٤) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٢} + ١}{٢س - ١}$

أ صفر ب $\frac{١}{٢}$ جـ ١ د ∞

(١٥) $\lim_{س \to \infty} \sqrt{\frac{١ + س}{٤س - ١}}$

أ -١ ب $\frac{١}{٤}$ جـ $\frac{١}{٢}$ د ١

إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية

(١٦) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣}{س^{٢}}$

(١٧) $\lim_{س \to \infty} (س^{٣} + ٥س^{٢} + ١)$

(١٨) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢ - ٧س}{٢ + ٣س}$

(١٩) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٢}}{س + ٣}$

(٢٠) $\lim_{س \to \infty} \frac{٤س^{٢}}{س^{٢} + ٣}$

(٢١) $\lim_{س \to \infty} \frac{٥ - ٦س - ٣س^{٢}}{٢س^{٢} + س + ٤}$

(٢٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س - ١}{س^{٢} + ٤س + ١}$

(٢٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٣} - ٢}{٣س^{٢} + ٤س - ١}$

(٢٤) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^{٢} - ١}{٤س^{٣} - ٥س - ١}$

(٢٥) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^{٢} - ٦}{(س - ١)^{٢}}$

(٢٦) $\lim_{س \to \infty} (٧ + \frac{٢س^{٢}}{(س + ٣)^{٢}})$

(٢٧) $\lim_{س \to \infty} (\frac{١}{٣س^{٢}} - \frac{٥س}{٢ + س})$

(٢٨) $\lim_{س \to \infty} (\frac{س}{(٢س + ١)^{٢}} + \frac{٣س^{٢}}{(س - ٣)^{٢}})$

(٢٩) $\lim_{س \to \infty} \frac{-س}{\sqrt{٤س^{٢} + ٨}}$

(٣٠) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٣} - ٤س + ٥}{(٢س - ١)^{٣}}$

(٣١) $\lim_{س \to \infty} (\sqrt{٤س^{٢} - ٢س + ١} - ٢س)$

(٣٢) $\lim_{س \to \infty} (\sqrt{٥س^{٢} + ٤س + ٧} - \sqrt{٥س^{٢} + س + ٣})$

(٣٣) $\lim_{س \to \infty} س (\sqrt{٤س^{٢} + ١} - ٢س)$

(٣٤) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٢} + س - ١}{٨س^{٢} - ٣}$

(٣٥) $\lim_{س \to \infty} \frac{٤ - ٣س^{٣}}{\sqrt{٩ + ٦س^{٨}}}$

(٣٦) $\lim_{س \to \infty} \frac{(س + ٢)^{٣}(٣ - ٢س^{٢})}{٣س (س^{٢} + ٧)^{٢}}$

(٣٧) إذا كان $\lim_{س \to \infty} (\sqrt{أس^{٢} + ٣ب س + ٥} - ٢س) = ٣$ فما قيمة كل من أ، ب.

(٣٨) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{-١} + ٣س^{-٢} + ٥}{٢س^{-٢} - س^{-٣} + ١}$

(٣٩) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^{-١} - ٣س^{-٢} + س^{-٣}}{٤س^{-٣} + س^{-١}}$

تفكير إبداعى

تنتج إحدى الشركات بطاقات معايدة بتكلفة ابتدائية قدرها ٥٠٠٠ جنيه وتكلفة لكل كارت نصف جنيه فكانت التكلفة الإجمالية جـ = $\frac{١}{٢}$ س + ٥٠٠٠ حيث س عدد البطاقات المنتجة.

أوجد:

(١) تكلفة إنتاج الكارت عند إنتاج:

أ ١٠٠٠٠ كارت　　ب ١٠٠٠٠٠ كارت

(٢) أوجد تكلفة إنتاج الكارت عندما تنتج الشركة عددًا لانهائى من الكروت.

تفكير إبداعى الربط بالديناميكا:



تعطى قوة الجذب العام بين جسم كتلته ك١ وكتلة الأرض ك٢ بالقانون ق = ث × $\frac{ك_{١} ك_{٢}}{ف^{٢}}$ حيث ث ثابت نيوتن للجذب العام و ف المسافة بين الجسم ومركز الأرض.

ماذا يحدث لقوة الجذب العام عندما يتحرك الجسم مسافة كبيرة جدًّا ؟ فسر إجابتك باستخدام النهايات.

الدرس ٤

نهايات الدوال المثلثية
Limits of Trigonometric Functions

سوف تتعلم
- نهاية دالة الجيب.
- نهاية دالة الظل.

المصطلحات الأساسية
- دالة مثلثية
 Trigonometric function
- نهاية دالة مثلثية
 Limit of a trigonometric function

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

فكر و ناقش

سبق أن درست الدوال المثلثية (دالة الجيب، دالة جيب التمام، دالة الظل) وعلمت أن حا س، جتا س معرفة لجميع قيم س ∈ ع، أما طا س فهى معرفة لجميع قيم س عدا القيم التي تكون عندها س = $\frac{(٢ن + ١)}{٢}\pi$ لكل ن ∈ صـ

كما سبق أن درست إيجاد نهاية بعض الدوال المثلثية عندما س ⟵ أ كالآتى:

$\lim_{س \to أ}$ حا س = حا أ ، حيث أ ∈ ع $\lim_{س \to أ}$ جتا س = جتا أ حيث أ ∈ ع

$\lim_{س \to أ}$ طا س = طا أ حيث أ عدد حقيقي أ ≠ $\frac{\pi}{٢}$ + نπ لكل ن ∈ صـ

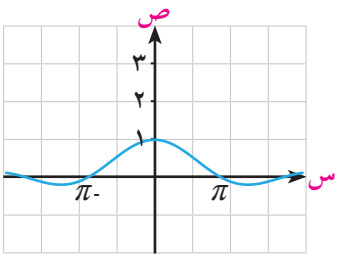
فهل يمكنك إيجاد $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{حا س}{س}$ ، $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{طا س}{س}$

تعلم

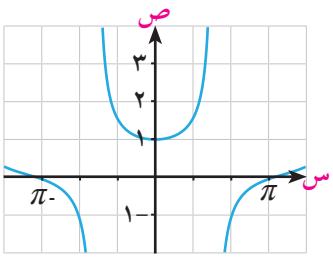
نظرية ١

إذا كانت س زاوية مقاسة بالتقدير الدائرى فإن:

$\lim_{س \to ٠}$ $\frac{حا س}{س}$ = ١ $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{طا س}{س}$ = ١



د(س) = $\frac{حا س}{س}$



د(س) = $\frac{طا س}{س}$

مثال

(١) أوجد النهايات الآتية:

(أ) $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{حا ٣س}{س}$ (ب) $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{طا ٢س}{٧س}$

الحل

أ $\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{حا ٣س}}{س} = ٣$ $\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{حا ٣س}}{٣س} = ٣ \times ١ = ٣$

ب $\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{طا ٢س}}{٧س} = \frac{٢}{٧}$ $\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{طا ٢س}}{٢س} = \frac{٢}{٧} \times ١ = \frac{٢}{٧}$

حاول أن تحل

(١) أوجد النهايات الآتية:

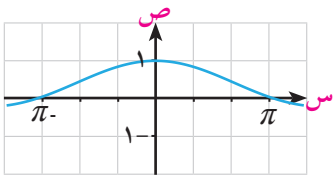
أ $\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{حا ٢س}}{٣س}$

ب $\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{طا ٤س}}{٥س}$

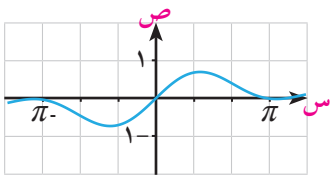
نتائج

١) $\text{نهـــا}_{س \to ٠}$ حتا س = ١

٢) $\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{١ - \text{حتا س}}{س} = ٠$



د(س) = حتا س



د(س) = $\frac{١ - \text{حتا س}}{س}$

مثال

(٢) أوجد النهايات الآتية:

أ $\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{حتا س} + ٢}{س - ٣}$

ب $\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{١ - \text{حتا س}}{\text{طا س}}$

الحل

أ $\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{حتا س} + ٢}{س - ٣} = \frac{\text{نهـــا}_{س \to ٠} (\text{جتا س} + ٢)}{\text{نهـــا}_{س \to ٠} (س - ٣)} = \frac{٢ + ١}{٠ - ٣} = -\frac{٣}{٣} = -١$

ب $\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{١ - \text{حتا س}}{\text{طا س}} = \text{نهـــا}_{س \to ٠} (\frac{١ - \text{حتا س}}{س} \times \frac{س}{\text{طا س}}) = ٠ \times ١ = ٠$

$= \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{١ - \text{حتا س}}{س} \times \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{س}{\text{طا س}} = ٠ \times ١ = ٠$

حاول أن تحل

(٢) أوجد النهايات الآتية:

أ $\text{نهـــا}_{س \to ٠}$ ٦س^{٢} قتا ٢س طتا س

ب $\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{١ - \text{حتا س}}{\text{حا ٢س}}$

مثال

(٣) أوجد النهايات الآتية:

أ $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ - ٣س + حا س}{٢س}$

ب $\lim_{س \to ٠} \frac{س + س حا س}{حا س حتا س}$

ج $\lim_{س \to ٠} \frac{حا (١ - حتا س)}{١ - حتا س}$

د $\lim_{س \to ٠} \frac{حا^٢ ٣س}{٥ س^٢}$

الحل

أ $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ - س + حا س}{٢س}$ بقسمة كل من البسط والمقام على س.

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س - ١ + ٣ \frac{حا س}{س}}{٢}$

$= \frac{\lim_{س \to ٠} (س - ١ + ٣ \frac{حا س}{س})}{\lim_{س \to ٠} ٢}$

$= \frac{٠ - ١ + ٣}{٢} = ١$

ب $\lim_{س \to ٠} \frac{س + س حتا س}{حا س حتا س}$ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١ + حتا س}{\frac{حا س}{س} \times حتا س}$

$= \frac{\lim_{س \to ٠} (١ + حتا س)}{\lim_{س \to ٠} \frac{حا س}{س} \times حتا س}$

$= \frac{١ + ١}{١ \times ١} = ٢$

ج $\lim_{س \to ٠} \frac{حا(١ - حتا س)}{١ - حتا س}$

اعتبر $\theta = ١ - حتا س$

عندما س $\longrightarrow$ ٠ نجد أن $\theta \longrightarrow$ ٠

$\lim_{\theta \to ٠} \frac{حا \theta}{\theta} = ١$

$\therefore \lim_{س \to ٠} \frac{حا(١ - حتا س)}{١ - حتا س} = ١$

د $\lim_{س \to ٠} \frac{حا^٢ ٣س}{٥ س^٢}$

$= \frac{١}{٥} (\lim_{س \to ٠} \frac{حا ٣س}{س})^٢$

$= \frac{٩}{٥} (\lim_{س \to ٠} \frac{حا ٣س}{٣س})^٢$

$= \frac{٩}{٥}$

حاول أن تحل

(٣) أوجد النهايات الآتية:

أ $\lim_{س \to ٠} \frac{حا ٣س}{٥ س^٣ - ٤س}$

ب $\lim_{س \to ٠} \frac{حا(س - ١)}{س^٢ + س - ٢}$

ج $\lim_{س \to ٠} \frac{حا س^٢}{٣ س}$

د $\lim_{س \to ١} \frac{س حا ٢س + حا^٢ ٢س}{ظا^٢ ٣س + س^٢}$

تمـــاريـن الدرس الرابع

أكمل مايأتى:

(١) $\lim_{س \to 0}$ جتا ٣ س = ...

(٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}}$ حا ٢ س = ...

(٣) $\lim_{س \to 0}$ طا س = ...

(٤) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{حا } ٧ س}{س}$ = ...

(٥) $\lim_{س \to 0}$ طا $\frac{٣س}{٤س}$ = ...

(٦) $\lim_{س \to ٥} \frac{\text{حا } (س - ٥)}{٣ (س - ٥)}$ = ...

(٧) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{حا } \pi س}{٢ س}$ = ...

(٨) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{حا}^٢ س}{س^٢}$ = ...

(٩) $\lim_{س \to 0} \frac{٣ + ٢ س}{\text{حتا } ٤ س}$ = ...

(١٠) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - \text{حتا } س}{٣ س}$ = ...

(١١) $\lim_{س \to 0} \frac{٢ س}{\text{طا } ٣ س}$ = ...

(١٢) $\lim_{س \to 0}$ ٣ س قتا ٢ س = ...

(١٣) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{حا}^٢ ٢ س}{٣ س^٢}$ = ...

(١٤) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{حا}^٢ س \text{ طا } ٣س}{٤س^٢}$ = ...

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١٥) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{حا } ٣ س}{س}$ تساوى

أ صفر ب $\frac{١}{٣}$ ج ١ د ٣

(١٦) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا } ٤س}{٥س}$ تساوى

أ صفر ب $\frac{٤}{٥}$ ج ١ د $\frac{٥}{٤}$

(١٧) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{حا } ٢ س + ٣ \text{ طا } س}{٥س}$ تساوى

أ ١ ب $\frac{٥}{٦}$ ج $\frac{٦}{٥}$ د ٢

(١٨) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{طا}^٢ ٢ س}{س \text{ حا } ٣ س}$ تساوى

أ $\frac{٤}{٩}$ ب $\frac{١}{٢}$ ج $\frac{٢}{٣}$ د $\frac{٤}{٣}$

(١٩) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{حا } \frac{١}{٢} س}{\text{حا } \frac{٣}{٤} س}$ تساوى

أ $\frac{١}{٦}$ ب $\frac{٣}{٨}$ ج $\frac{١}{٢}$ د $\frac{٢}{٣}$

(٢٠) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{حا } س}{س}$ حيث س بالتقدير الستينى

أ ١ ب $\frac{\pi}{١٨٠}$ ج $\frac{١٨٠}{\pi}$ د π

إيجاد نهاية الدوال المثلثية

(٢١) $\lim_{س \to 0} \frac{حا\ س}{٥س}$

(٢٢) $\lim_{س \to 0} \frac{حا\ س}{طا\ س}$

(٢٣) $\lim_{س \to 0} \frac{طا\ ٢س}{س}$

(٢٤) $\lim_{س \to 0} \frac{٣(١- حتا\ س)}{س}$

(٢٥) $\lim_{س \to 0} \frac{حا\ س\ (١ - حتا\ س)}{س^{٢}}$

(٢٦) $\lim_{س \to 0} \frac{حتا\ س\ طا\ س}{س}$

(٢٧) $\lim_{س \to 0} \frac{حا^{٢}\ س}{س}$

(٢٨) $\lim_{س \to 0} \frac{طا\ س}{س^{٢}}$

(٢٩) $\lim_{س \to 0} \frac{(١- جتا^{٢}\ س)}{س^{٢}}$

(٣٠) $\lim_{س \to 0} \frac{حتا\ س - ١}{حا\ س}$

(٣١) $\lim_{س \to 0} \frac{س - س\ حتا\ س}{حا^{٢}\ ٣س}$

(٣٢) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - طا\ س}{حاس - حتا\ س}$

(٣٣) $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{س\ جتا\ (-٢س+١)}{س^{٢}+س}$

(٣٤) $\lim_{س \to 0} \frac{س^{٢} - ٣\ حا\ س}{س}$

(٣٥) $\lim_{س \to -0} (١ + حتا\ س) \times \frac{١ - حتا\ س}{س^{٢}}$

(٣٦) $\lim_{س \to 0} \frac{طا\ ٣س^{٢} + حا^{٢}\ ٥س}{س^{٢}}$

(٣٧) $\lim_{س \to 0} \frac{حا\ ٥س^{٣} + حا^{٣}٥س}{٢\ س^{٣}}$

(٣٨) $\lim_{س \to 0} (\frac{٢س^{٢} + حا\ ٣\ س}{٢س^{٢} + طا\ ٦\ س})^{٤}$

(٣٩) $\lim_{س \to 0} \frac{٢س^{٣} + س\ حا\ ٥س}{س^{٢} - طا\ ٣\ س^{٢}}$

(٤٠) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - جتاس + حا\ س}{١ - جتا\ س - حا\ س}$

(٤١) $\lim_{س \to 0} \frac{طا\ ٢س + ٥\ حا\ ٣\ س}{٢\ حا\ ٣\ س - طا\ ٥س}$

(٤٢) $\lim_{س \to 0} \frac{س\ طا\ ٢\ س}{س^{٢} + حا^{٢}\ ٣س}$

(٤٣) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا\ ٣س}{حتا^{٢}\ ٢س - ١}$

(٤٤) $\lim_{س \to 0} \frac{٢ - حتا\ ٣\ س - حتا\ ٤\ س}{س}$

(٤٥) $\lim_{س \to 0} \frac{طا\ ٣\ س^{٢} + حا^{٢}\ ٥\ س}{س^{٢}}$

(٤٦) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - حتا\ س}{س^{٢}}$

(٤٧) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - حتا\ ٣\ س}{حتا^{٢}\ ٥\ س - ١}$

(٤٨) $\lim_{س \to 0} \frac{حا\ (حا\ س)}{٥\ حا\ س}$

(٤٩) $\lim_{س \to 0} \frac{س}{حتا\ (\frac{\pi}{٢} - س)}$

الدرس ٥

بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة

Existence of limit of a function at point

سوف تتعلم
- النهاية من اليمين
- النهاية من اليسار

المصطلحات الأساسية
- نهاية يمنى — *Right Limit*
- نهاية يسرى — *Left Limit*

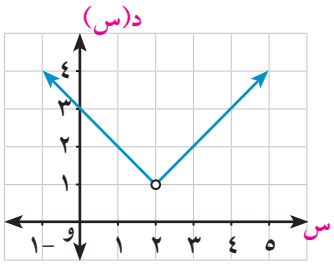
الأدوات المستخدمة
- ألة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

فكر و ناقش

شكل (١)

يمثل منحنى الدالة د حيث

$$د(س) = \begin{cases} س - ١ & \text{لكل } س < ٢ \\ ٣ - س & \text{لكل } س > ٢ \end{cases}$$



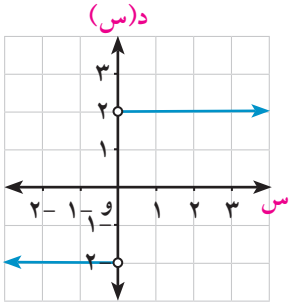
شكل (١)

- ابحث وجود $\lim_{س \to ٢^+}$ د(س)
- ابحث وجود $\lim_{س \to ٢^-}$ (س)
- هل $\lim_{س \to ٢^+}$ د(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ د(س)

شكل (٢):

يمثل الدالة ر حيث

$$ر(س) = \begin{cases} ٢ & \text{لكل } س < ٠ \\ -٢ & \text{لكل } س > ٠ \end{cases}$$



شكل (٢)

- ابحث وجود $\lim_{س \to ٠^-}$ ر(س)
- ابحث وجود $\lim_{س \to ٠^+}$ ر(س)
- هل $\lim_{س \to ٠^-}$ ر(س) = $\lim_{س \to ٠^+}$ ر(س)

تعلم

نهاية الدالة *Limit of a function*

يقال إن نهاية الدالة د عندما س تؤول إلى أ تساوى ل إذا وفقط إذا كان نهايتها من اليمين ومن اليسار عندما س تؤول إلى أ متساويتين وكل منهما تساوى ل حيث ل ∈ ع وتكتب رمزيًّا:

$\lim_{س \to أ}$ د(س) = ل إذا و فقط إذا كان: د (أ$^+$) = د (أ$^-$) = ل

حيث

د (أ$^+$) = $\lim_{س \to أ^+}$ د(س)

د (أ$^-$) = $\lim_{س \to أ^-}$ د(س)

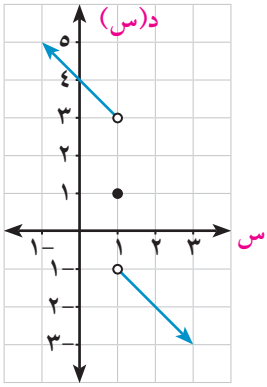
أمثلة توضيحية:

١- لاحظ من الشكل أن

د(-١) = ٣ د(+١) = -١

∴ د(-١) ≠ د(+١)

∴ لايوجد نهاية للدالة د عند س ← ١

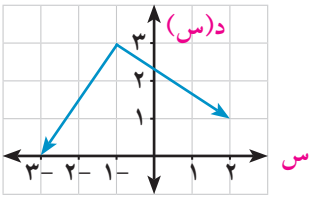


٢- لاحظ من الشكل البيانى أن

د(-١-) = ٣ د(-١+) = ٣

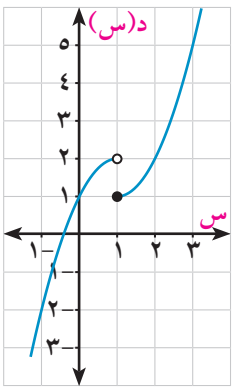
∴ د(-١-) = د(-١+) = ٣

∴ $\lim_{س \to -١}$ د(س) = ٣



حاول أن تحل

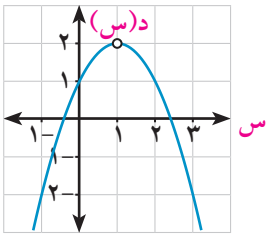
(١) بدراسة الأشكال البيانية الآتية للدوال الموضحة أوجدْ كلًّا مما يأتى:



أ د(-١)

ب د(+١)

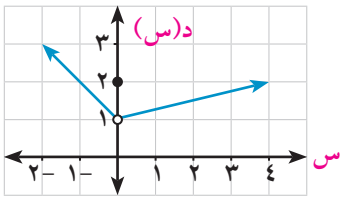
جـ $\lim_{س \to ١}$ د(س)



أ د(-١)

ب د(+١)

جـ $\lim_{س \to ١}$ د(س)



أ د(-٠)

ب د(+٠)

جـ $\lim_{س \to ٠}$ د(س)

مثال

(١) أوجد نهاية الدالة الآتية عندما س ← ٠ إن وجدت

د(س) = { س|س| - ١ عندما س > ٠ ، $\frac{|س|}{س}$ - ٢ عندما س < ٠

الحل

بإعادة تعريف الدال

د(س) = { -س^{٢} - ١ لكل س > ٠ ، -١ لكل س < ٠

∵ د(٠-) = $\lim_{س \to ٠^-}$ د(س) = $\lim_{س \to ٠^-}$ (-س^{٢} - ١) = -١

د(٠+) = $\lim_{س \to ٠^+}$ - ١ = -١

∵ د(٠-) = د(٠+) = -١ ∴ $\lim_{س \to ٠}$ د(س) = -١

حاول أن تحل

(٢) إذا كان د(س) = $\begin{cases} |س - ٣| & س \neq ٣ \\ ٢ & س = ٣ \end{cases}$

أوجد $\lim_{س \to ٣}$ د(س) إن كان ذلك ممكنًا

مثال

(٢) ابحث وجود نهاية للدلة د عندما س ← ٠ حيث: د(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ + ٢س}{س} & \text{لكل } س > ٠ \\ ٣ + (\pi - س) \text{ قا} & \text{لكل } س < ٠ \end{cases}$

الحل

د(٠⁻) = $\lim_{س \to ٠^-}$ د (س) = $\lim_{س \to ٠^-} \frac{س^٢ + ٢س}{س}$

= $\lim_{س \to ٠^-}$ (س + ٢) = ٢

د (٠⁺) = $\lim_{س \to ٠^+}$ د (س) = $\lim_{س \to ٠^+}$ [٣ + (π - س) قا]

= ٣ + π قا = ٣ + ١- = ٢

∵ د (٠⁻) = د (٠⁺) = ٢ ∴ $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = ٢

حاول أن تحل

(٣) ابحث وجود نهاية للدالة د عندما س ⟵ π حيث د(س) = $\begin{cases} \frac{\text{حاس}}{π - س} & \text{لكل } س > \pi \\ \text{حتا س} & \text{لكل } س < \pi \end{cases}$

مثال

(٣) ابحث وجود نهاية للدلة د عندما س ⟵ ١ حيث: د(س) = $\sqrt{س - ١}$

الحل

∵ د (س) معرفة لجميع قيم س - ١ > ٠ ∴ مجال الدالة د (س) = [١ ، ∞ [



∵ د (١⁺) = $\lim_{س \to ١^+}$ د (س) ∴ د (١⁺) = $\lim_{س \to ١^+} \sqrt{س - ١}$ = صفر

د (١⁻) غير معرفة لأن الدالة غير معرفة على يسار ١

∴ د (س) ليس لها نهاية عندما س ⟵ ١

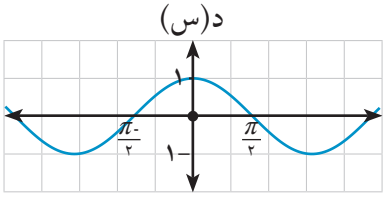
حاول أن تحل

(٤) ابحث وجود نهاية للدالة د عندما س ← ٣ حيث د (س) = $\sqrt{٣ - س}$

تمـاريـن الدرس الخامس

أكمل مايأتى:

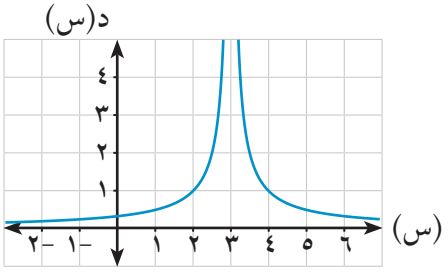
(١) من الشكل البيانى المقابل:



أ) نهـــا د(س) = ... $س \to ٠^-$

ب) نهـــا د(س) = ... $س \to ٠^+$

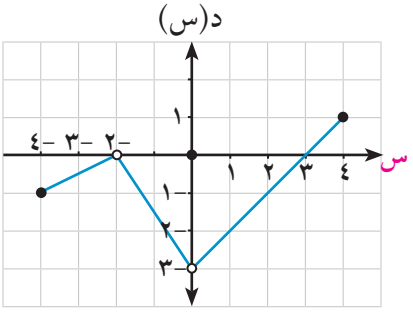
(٢) من الشكل البيانى المقابل:



أ) نهـــا د(س) = ... $س \to ٣^-$

ب) نهـــا د(س) = ... $س \to ٣^+$

(٣) من الشكل البيانى المقابل:



أ) نهـــا د(س) = ... $س \to -٢$

ب) نهـــا د(س) = ... $س \to ٠$

جـ) نهـــا د(س) = ... $س \to -١$

د) نهـــا د(س) = ... $س \to -٤$

هـ) نهـــا د(س) = ... $س \to ٤$

(٤) الدالة د معرفة على ع حيث د(س) = $\begin{cases} ٢ & \text{لكل } س \leqslant ٠ \\ ٢ - س & \text{لكل } س > ٠ \end{cases}$

أ) نهـــا د(س) = ... $س \to ٠^-$

ب) نهـــا د(س) = ... $س \to ٠^+$

(٥) الدالة د معرفة على ع حيث د(س) = $\begin{cases} ٣ & \text{لكل } س < ٠ \\ -٣ س & \text{لكل } س \geqslant ٠ \end{cases}$

أ) نهـــا د(س) = ... $س \to ٠^+$

ب) نهـــا د(س) = ... $س \to ٠^-$

(٦) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} س & \text{لكل } س \leqslant ٠ \\ \frac{١}{س} & \text{لكل } س > ٠ \end{cases}$

أ) نهـــا د(س) = ... $س \to ٠^+$

ب) نهـــا د(س) = ... $س \to ٠^-$

ابحث نهاية الدوال الآتية « إن وجدت»

(٧) $\lim_{س \to ٢}$ د(س) حيث د(س) = { ٢ س ، لكل س < ٢ ؛ س^{٢} ، لكل س ⩾ ٢ }

(٨) $\lim_{س \to ٣}$ د(س) حيث د(س) = { س^{٢} + ١ ، لكل س < -٣ ؛ ٣ س + ١ ، لكل س ⩾ -٣ }

(٩) $\lim_{س \to ٠}$ د(س) حيث د(س) = { س^{٢} + ٢ ، لكل س < ٠ ؛ ٣س + ١ ، لكل س ⩾ ٠ }

(١٠) $\lim_{س \to -١}$ د(س) حيث د(س) = { ٢ س + ١ ، لكل س < -١ ؛ -١ ، لكل س > -١ }

(١١) أوجد قيمة م حتى تكون د(س) لها نهاية حيث عندما س ⟵ ١ د(س) = { $\frac{(س-١)^{٢}}{|س-١|}$ ، لكل س > ١ ؛ ٦س - ٣ م ، لكل س < ١ }

(١٢) ابحث وجود نهاية للدالة د حيث عندماس ⟵ ١ د(س) = { $\frac{٢ حا س}{س - \pi}$ ، لكل س > π ؛ ١ + حتا س ، لكل س < π }

عندما س ⟵ π

(١٣) أوجد قيمة كل من م، ك إذا كان $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ٧ ، د(س) = { س^{٢} + ٣م ، لكل س > ٢ ؛ ٥س + ك ، لكل س < ٢ }

(١٤) أوجد قيمة ك التى تجعل للدالة د(س) نهاية عندما س ⟵ -١ حيث، د(س) = { س^{٢} + ك ، لكل س > -١ ؛ س + ٤ ، لكل س < -١ }

(١٥) ابحث وجود نهاية للدالة د عندما س ⟵ ٠ حيث، د(س) = { $\frac{٥س + ط٢ س}{٦ س + حا س}$ ، لكل س < ٠ ؛ جتا س ، لكل س > ٠ }

(١٦) ابحث وجود نهاية للدالة د حيث د(س) = { $\frac{٣ س}{ط س}$ ، لكل $-\frac{\pi}{٣}$ < س < ٠ ؛ ٣ جتا س ، لكل ٠ < س < $\frac{\pi}{٣}$ }

أ عندما س ⟵ $-\frac{\pi}{٣}$ ب س ⟵ $\frac{\pi}{٣}$ ج س ⟵ ٠

(١٧) ابحث وجود نهاية للدالة د ، د(س) = |س^{٢} - ٤س + ٣| عندما:

أ س ⟵ ١ ب س ⟵ ٣

(١٨) ابحث وجود نهاية للدالة د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ عندما س ⟵ ٢

الدرس ٦

الاتصال
Continuity

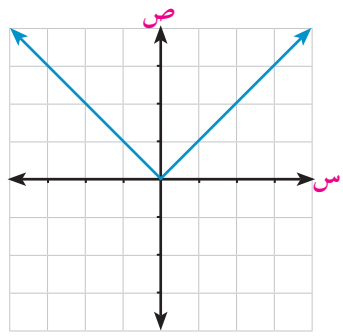
سوف تتعلم
- اتصال دالة عند نقطة.
- اتصال دالة على فترة.

المصطلحات الأساسية
- اتصال دالة
 Continuity of a function
- اتصال دالة عند نقطة
 Continuity of a function on Interval
- اتصال دالة على فترة
 Continuity of a function at a point

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

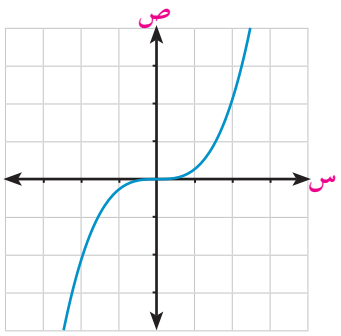
فكر و ناقش

تأمل الأشكال الآتية ثم بين ماذا تلاحظ؟



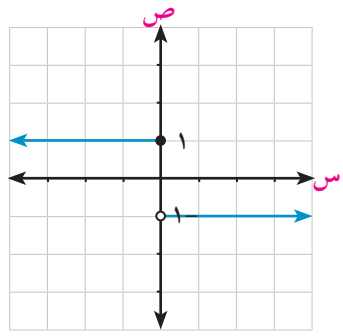
د١(س) = |س|

شكل (١)



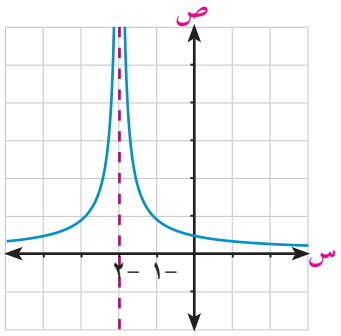
د٢(س) = س٣

شكل (٢)



د٣(س) = { ١ لكل س ≥ ١ ; -١ لكل س < ١ }

شكل (٣)



د٤(س) = ١ / |س + ٢|

شكل (٤)

فى شكل (١) ، (٢) نلاحظ أن منحنى كل من الدالتين متصل وغير متقطع عند أى نقطة.

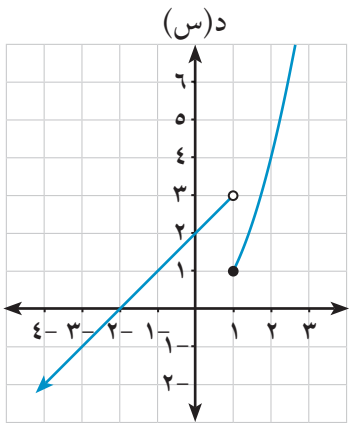
فى شكل (٣) منحنى الدالة غير متصل عند النقطة س = ...

فى شكل (٤) منحنى الدالة غير متصل عند النقطة س = ...

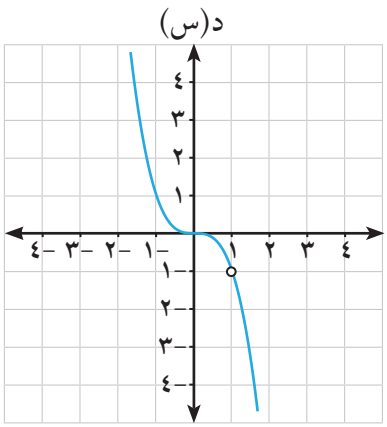
مما سبق نستنتج أن الدالة (د) تكون متصلة عند س = أ إذا كان منحنى الدالة لا يعانى انقطاعًا عند هذه النقطة، وتكون الدالة غير متصلة عند س = أ إذا انقطع منحناها عند هذه النقطة.

اتصال دالة عند نقطة

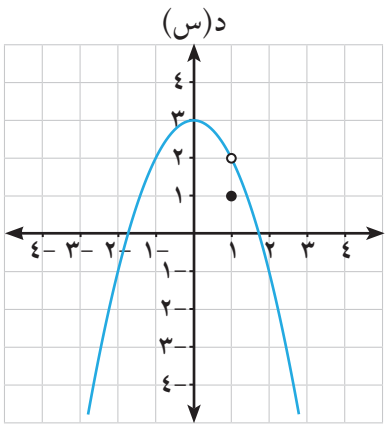
Continuity of a fanction at a Point



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

تأمل الأشكال السابقة ثم أوجد $\lim_{س \to ١}$ د(س)، د(١) إن وجدت.

في الشكل (١): $\lim_{س \to ١^+}$ د(س) = ٣ ، $\lim_{س \to ١^-}$ د(س) = ١ أي أن $\lim_{س \to ١}$ د(س) غير موجودة بينما د(١) = ١

في الشكل (٢): $\lim_{س \to ١^+}$ د(س) = -١ ، $\lim_{س \to ١^-}$ (س) = -١ أي أن $\lim_{س \to ١}$ د(س) = -١ ، د(١) غير معرفة.

في الشكل (٢): $\lim_{س \to ١^+}$ د(س) = ٢ ، $\lim_{س \to ١^-}$ (س) = ٢ أي أن $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ٢ بينما د(١) = ١

أي أن: $\lim_{س \to ١}$ د(س) ≠ د(١)

لذلك تكون الدالة د(س) في كل شكل من الأشكال السابقة غير متصلة عند س = ١

حاول أن تضع تعريفًا للدالة المتصلة عند نقطة من خلال هذه الملاحظات.

تعريف

تكون الدالة د متصلة عندما س = أ ؛ إذا تحققت الشروط الآتية معًا:

- $\lim_{س \to أ}$ د(س) موجودة
- د(أ) موجودة
- $\lim_{س \to أ}$ د(س) = د(أ)

مثال

(١) ابحث اتصال الدالة د حيث د(س) = $\frac{س + ٣}{س - ٢}$ عند س = ٢، س = ٣

الحل

∵ مجال الدالة = ع - {٢}

أولاً بحث اتصال الدالة عند س = ٢ ∵ د(س) غير معرفة عند س = ٢ ∴ د(س) غير متصلة عند س = ٢

بحث اتصال الدالة عند س = ٣

∵ د(٣) = $\frac{٣ + ٣}{٢ - ٣}$ = ٦ ، ∵ $\lim_{س \to ٣}$ $\frac{س + ٣}{س - ٢}$ = $\frac{٣ + ٣}{٢ - ٣}$ = ٦ ∴ $\lim_{س \to ٣}$ د(س) = د(٣)

لذلك د(س) متصلة عند س = ٣

مثال

(٢) ابحث اتصال الدالة د(س) = ٥ - |س - ٣| عند س = ٣

الحل

بإعادة تعريف الدالة $د(س) = \begin{cases} ٨ - س & \text{عندما } س \leqslant ٣ \\ س + ٢ & \text{عندما } س > ٣ \end{cases}$

∵ د(٣) = ٥ ، ∵ $د(٣^+) = \lim_{س \to ٣^+}$ (٨ - س) = ٥ ، $د(٣^-) = \lim_{س \to ٣^-}$ (س + ٢) = ٥

∴ $\lim_{س \to ٣}$ د(س) = ٥ أي أن د(٣) = $\lim_{س \to ٣}$ د(س) لذلك فإن الدالة متصلة عند س = ٣

حاول أن تحل

(١) بين أن د(س) = $\frac{س^٢ + ٢س - ١٥}{س - ٣}$ غير متصلة عند س = ٣

ثم أوجد قيمة هـ التي تجعل د(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ + ٢س - ١٥}{س - ٣} & \text{لكل } س \neq ٣ \\ هـ + ١ & \text{عند } س = ٣ \end{cases}$ متصلة عند س = ٣

إعادة تعريف الدالة بحيث تكون متصلة (إن كان ذلك ممكنًا)

مثال

(٣) أعد تعريف الدالة الآتية حتى تصبح متصلة عند س = ٣ إذا كان ممكنًا حيث د(س) = $\frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٣}$

الحل

لكي تكون الدالة د متصلة عند س = ٣ فإن $\lim_{س \to ٣}$ د (س) = د(٣)

∴ $\lim_{س \to ٣}$ $\frac{(س - ٣)(س - ٢)}{س - ٣}$ = $\lim_{س \to ٣}$ (س - ٢) أي أن $\lim_{س \to ٣}$ د(س) = ١

∴ د(٣) = ١ لذلك فإن الدالة د المتصله عند س = ٣ هي د(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٣} & \text{حيث } س \neq ٣ \\ ١ & \text{عندما } س = ٣ \end{cases}$

حاول أن تحل

(٢) أعد تعريف الدالة د حيث د(س) = $\frac{س^٢ + ٣س - ١٠}{س - ٢}$ حيث س ≠ ٢ بحيث تكون متصلة عند س = ٢

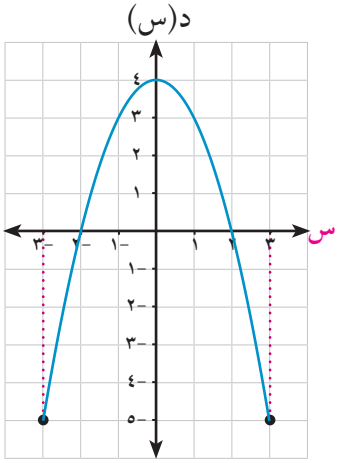
اتصال دالة على فترة *continuity of a function on interval*

يمثل الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث د(س) = ٤ - $س^٢$

في الفترة [-٣، ٣] ولكي تكون د متصلة على الفترة [-٣، ٣]

فلابد أن تكون متصلة عند جميع نقاط تلك الفترة.

أي أن: $\lim_{س \to ا}$ د(س) = د(ا) لكل ا ∈]-٣، ٣[



ومما سبق يمكن التوصل إلى التعريف الآتى:

تعريف ٢

إذا كانت د (س) معرفة على الفترة [أ، ب] .

تكون الدالة متصلة على الفترة [أ، ب] إذا كانت:

١- د(س) متصلة على الفترة]أ، ب[

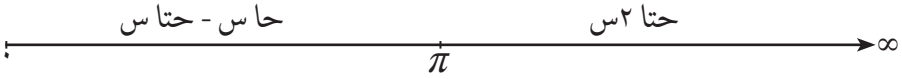
٢- $\lim_{س \to أ^+}$ د(س) = د(أ) ، $\lim_{س \to ب^-}$ د(س) = د(ب)

مثال

٤ ابحث اتصال الدالة الآتية على الفترة [٠ ، ∞[حيث د(س) =

$$\begin{cases} \text{حا س - حتا س} & \text{لكل } ٠ \leqslant س \leqslant \pi \\ \text{حتا ٢س} & \text{لكل } س > \pi \end{cases}$$

الحل



د(س) معرفة على الفترة [٠، ∞[

لكى نبحث اتصال الدالة، نبحث اتصالها على فترات مجالها الجزئية، وكذلك اتصالها عند النقاط التى يتغير عندها تعريف الدالة وأيضًا من اليمين عند الصفر.

١- د(س) = حا س - حتا س متصلة على الفترة]٠، π[

كذلك د(س) = حتا ٢س متصلة على الفترة]π، ∞[

٢- د(٠) = حا ٠ - حتا ٠ = - ١ ، $\lim_{س \to ٠^+}$ (حا س - حتا س) = - ١

أى أن: د(٠) = $\lim_{س \to ٠^+}$ د(س) فالدالة متصلة من جهة اليمين عند س = ٠

٣- نبحث اتصال الدالة عندما س = π

د(π) = حا π - حتا π = ١

د(π⁻) = $\lim_{س \to \pi^-}$ (حا س - حتا س) = ١ ، د(π⁺) = $\lim_{س \to \pi^+}$ حتا ٢س = ١

د(π⁻) = د(π⁺) = د(π) أى أن: د(π⁻) = د(π⁺) = ١

∴ متصلة عند س = π من ١ ، ٢ ، ٣ الدالة متصلة على [٠ ، ∞[

حاول أن تحل

٣ ابحث اتصال الدالة د حيث

$$د(س) = \begin{cases} ١ + \text{حا س} & ٠ \leqslant س < \frac{\pi}{٢} \\ ٢ + (س - \frac{\pi}{٢})^{٢} & س \geqslant \frac{\pi}{٢} \end{cases}$$

مثال

٥ ابحث اتصال كل من الدوال الآتية:

أ $د(س) = س^{٢} - ٣س + ٢$

ب $د(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} + ٤}$

ج $د(س) = \frac{حا س + حتا س}{س^{٢} - ١}$

د $د(س) = \frac{طا س}{س^{٢} + ١}$

الحل

أ $د(س) = س^{٢} - ٣س + ٢$ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية فهى متصلة على ع

ب $د(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} + ٤}$ دالة كسرية جبرية

، $س^{٢} + ٤ > ٠$ لجميع قيم س لذلك فلا توجد أصفار للمقام

أى أن الدالة متصلة على ع

ج $د(س) = \frac{حا س + حتا س}{س^{٢} - ١}$

∵ حا س، حتا س متصلة على ح، دالة المقام $(س^{٢} - ١)$ متصلة على ع

∴ الدالة د متصلة على ع - {-١، ١}

د $د(س) = \frac{طا س}{س^{٢} + ٤}$

دالة البسط: طا س متصلة على ع - $\{س: س = \frac{\pi}{٢} + ن\pi، ن \in صـ\}$

دالة المقام: $س^{٢} + ١ > ٠$ لجميع قيم س فلا توجد أصفار للمقام.

أي أن د متصلة على ع - $\{س: س = \frac{\pi}{٢} + ن\pi، ن \in صـ\}$

أضف إلى معلوماتك

بعض أنماط الدوال المتصلة

الدالة كثيرة الحدود: متصلة على ع أو على فترة تعريفها.

الدالة الكسرية: متصلة على ع عدا مجموعة أصفار دالة المقام.

دالة الجيب وجيب التمام متصلة على ع

دالة الظل: متصلة على ع - $\{س: س = \frac{\pi}{٢} + ن\pi\}$، ن ∈ صـ

لاحظ أن

إذا كانت $د_{١}$، $د_{٢}$ متصلتين على ع فإن:

١- $د_{١} \pm د_{٢}$ متصل على ع

٢- $د_{١} \times د_{٢}$ متصل على ع

٣- $\frac{د_{١}}{د_{٢}}$ تكون متصلة على ع عدا مجموعة أصفار المقام.

حاول أن تحل

٤ ابحث اتصال كل من الدوال الآتية:

أ $د(س) = ٧$

ب $د(س) = \frac{س - ٢}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

ج $د(س) = \frac{س^{٣} + ١}{حا س}$

د $د(س) = (س + ١)$حتا س

٥ الربط بالكيمياء

إذا كان معدل التفاعل من تجربة كيميائية يعطى بالدالة ر حيث $ر(س) = \frac{٠,٦ س}{س + ١٢}$ ، س تركيز المحلول.

أ مثل الدالة بيانيًا بأحد البرامج الرسومية.

ب ابحث اتصال هذه الدالة.

تمـاريـن الدرس السادس

ادرس اتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المعطاة:

(١) د(س) = $\begin{cases} س^{٢}+٢ & ، \ س \geq ١ \\ ٣س & ، \ س < ١ \end{cases}$ عند س = ١

(٢) د(س) = $\begin{cases} س^{٢}-١ & ، \ س \geq ٢ \\ ٢س-١ & ، \ س < ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

(٣) د(س) = $\begin{cases} س^{٢}-٣س+٢ & ، \ س \geq ٣ \\ س^{٢}-٢س-١ & ، \ س < ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

(٤) د(س) = $\begin{cases} س+٤ & ، \ س > -٢ \\ ١ & ، \ -٢ \geq س > -١ \\ ٢س+٣ & ، \ س \leq -١ \end{cases}$ عند س = -٢، عند س = -١

(٥) د(س) = $\begin{cases} \frac{جا(س-٢)}{س^{٢}-٤} & ، \ س > ٢ \\ \frac{٣}{س^{٢}}-١ & ، \ س \leq ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

(٦) د(س) = $\begin{cases} \frac{١-جتا س}{س} & ، \ س < ٠ \\ ٢ جا س & ، \ س \geq ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

ابحث اتصال كل من الدوال الآتية على ع

(٧) د(س) = $س^{٣}-٢س^{٢}+١$

(٨) د(س) = $\frac{-س}{س^{٢}+١}$

(٩) د(س) = $\frac{٣س+٢}{س^{٢}-٢س}$

(١٠) د(س) = $\frac{٢س-٣}{س^{٢}-٢س-١٥}$

(١١) د(س) = $\frac{س}{|س|-٢}$

(١٢) د(س) = $\frac{|س+٢|}{(س+٢)^{٢}}$

(١٣) د(س) = جا س - ٣ جتا (س + ١)

(١٤) د(س) = $س^{٢}+$ جتا ٢ س

(١٥) د(س) = $س^{٣}$ جا ٢ س

(١٦) د(س) = طا ٢ س - ١

(١٧) د(س) = $\frac{جا^{٢}س+جتا س}{س^{٢}-٩}$

(١٨) د(س) = $\frac{ظا س}{س^{٢}-٩}$

ابحث اتصال كل الدوال الآتية على الفترة المعطاة:

(١٩) د(س) = $\begin{cases} \frac{س طاس+جا^{٢}٣س}{٥س^{٢}} & ، \ -\frac{\pi}{٤} < س < ٠ \\ ٢ جتا ٢ س & ، \ ٠ \leq س < \frac{\pi}{٤} \end{cases}$ على الفترة $]-\frac{\pi}{٤}، \frac{\pi}{٤}[$

(٢٠) د(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٦}-١}{س^{٣}-١} & ، \ -٤ < س < ١ \\ ٣س-١ & ، \ ١ \leq س < ٤ \\ س^{٢} & ، \ ٤ \leq س < ٦ \end{cases}$ على الفترة]-٤، ٦[

أوجد قيم أ في كل مما يأتي إذا كان:

(٢١) د(س) = $\frac{س+٣}{س^{٢}+أس+٩}$ متصلة على ع

(٢٢) د(س) = $\begin{cases} \frac{(س+٣)^{٤}-٨١}{س} & \text{حيث س} \neq ٠ \\ أ & \text{عندما س} \neq ٠ \end{cases}$ متصلة على ع

أوجد قيمتي الثابتين ب ، جـ في كل مما يأتي:

(٢٣) د(س) = $\begin{cases} س+١ & ، \quad ١ < س < ٣ \\ س^{٢}+ب س+جـ & ، \quad س \in ع -]١ ، ٣[\end{cases}$ متصلة على ع

(٢٤) د(س) = $\begin{cases} س+٢ب & ، \quad س < -٢ \\ ٣ ب س+حـ & ، \quad -٢ \leq س \leq ١ \\ ٣س-٢ب & ، \quad س > ١ \end{cases}$ متصلة على ع

أعد تعريف كل من الدوال الآتية حتى تصبح متصلة عند النقط المبينة إذا كان ممكنًا:

(٢٥) د(س) = $\begin{cases} س^{٢}+١ & ، \quad س \leq ٢ \\ \frac{س^{٢}-٤}{س-٢} & ، \quad س > ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

(٢٦) د(س) = $\begin{cases} \frac{٣س+١-جتا س}{٥س} & ، \quad س < ٠ \\ \frac{٣}{٥} جا س & ، \quad س > ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

(٢٧) د(س) = $\begin{cases} \frac{(س-٣)^{٥٠}+(س-٣)}{س-٣} & ، \quad س < ٣ \\ جتا (٣-س) & ، \quad س > ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

(٢٨) د(س) = $\frac{س^{٢}-س-٦}{س-٣}$ عند س = ٣

(٢٩) أوجد قيمة جـ التي تجعل الدالة د متصلة عند جـ حيث: د(س) = $\begin{cases} ٢-س^{٢} & س \geq جـ \\ س & س < جـ \end{cases}$

ملخص الوحدة

١- مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة $\overline{ع}$ هى ع ∪ {-∞ ، ∞}

أ) ∞ + أ = ∞ ب) ∞- + ∞- = ∞- ج) $\frac{أ}{∞}$ = $\frac{أ}{∞-}$ = صفر

د) ∞ × أ = { ∞- ، إذا كان أ > ٠ ، ∞ ، إذا كان أ < ٠ }

هـ) ∞- × أ = { ∞ ، إذا كان أ < ٠ ، ∞ ، إذا كان أ > ٠ }

٢- أن وجود نهاية للدالة عندما س ⟵ أ لايعنى بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = أ، والعكس إذا كانت د(س) معرفة عند س = أ فهذا لايعنى وجود نهاية للدالة.

٣- إذا كان $\lim_{س \to أ}$ د(س) = ل ، $\lim_{س \to أ}$ و(س) = م فإن:

أ) $\lim_{س \to أ}$ ك د(س) = ك.ل حيث ك ∈ ع ب) $\lim_{س \to أ}$ [د(س) ± و(س)] = ل ± م

ج) $\lim_{س \to أ}$ د(س) . و(س) = ل.م د) $\lim_{س \to أ}$ $\frac{د(س)}{و(س)}$ = $\frac{ل}{م}$ بشرط م ≠ ٠

هـ) $\lim_{س \to أ}$ (د(س))ن = لن حيث لن ∈ ع و) $\lim_{س \to ∞}$ $\frac{١}{س}$ = ٠

ز) $\lim_{س \to ∞}$ $\frac{أ}{س^{ن}}$ = ٠ {حيث ن ∈ ع+، أ ثابت}

ح) $\lim_{س \to ∞}$ جـ = جـ ، حيث جـ ثابت إذا كان ن عددًا صحيحًا موجبًا فإن $\lim_{س \to ∞}$ $س^{ن}$ = ∞

٤- عند إيجاد $\lim_{س \to ∞}$ $\frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث كل من د(س)، ر(س) دوال كثيرات الحدود فإن:

أ) النهاية تعطى عددًا حقيقيًّا لايساوى الصفر إذا كانت درجة البسط = درجة المقام.

ب) النهاية تساوى صفرًا إذا كانت درجة البسط < درجة المقام.

ج) النهاية تعطى ± ∞ إذا كانت درجة البسط > درجة المقام.

د) $\lim_{س \to أ}$ حا س = حا أ، حيث أ ∈ ع ، $\lim_{س \to أ}$ حتا س = حتا أ حيث أ ∈ ع

هـ) $\lim_{س \to أ}$ طا س = طا أ حيث أ عدد حقيقي ، أ ≠ $\frac{\pi}{٢}$ + نπ لكل ن ∈ صـ

و) إذا كانت س زاوية مقاسة بالتقدير الدائرى فإن: $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{حا س}{س}$ = ١ ، $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{طا س}{س}$ = ١

٥- $\lim_{س \to ٠}$ حتا س = ١ ، $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{١ - \text{حتا س}}{\text{س}}$ = ٠

٦- يقال أن نهاية الدالة د(س) عندما س تؤول إلى أ تساوى ل إذا وفقط إذا كانت نهايتيها من اليمين ومن اليسار عندما س تؤول إلى أ متساويتين وكل منهما تساوى ل.

وتكتب رمزيًا: $\lim_{س \to أ}$ د(س) = ل إذا وفقط إذا كان: د ($أ^+$) = د ($أ^-$) = ل حيث:

أ د ($أ^+$) = $\lim_{س \to أ^+}$ د(س) ، د ($أ^-$) = $\lim_{س \to أ}$ د(س)

٧- تكون الدالة د متصلة عندما س = أ إذا تحققت الشروط الآتية معًا:

أ $\lim_{س \to أ}$ د(س) موجودة ب د(أ) موجودة ج $\lim_{س \to أ}$ د(س) = د (أ)

٨- إذا كانت د (س) معرفة على الفترة [أ، ب]. تكون الدالة متصلة على الفترة [أ، ب] إذا كانت:

أ د(س) متصلة على الفترة]أ ، ب[

ب $\lim_{س \to أ^+}$ د(س) = د(أ)

ج $\lim_{س \to ب^-}$ د(س) = د(ب)

تمارين عامة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{حا } ٦س}{س} =$

(٦ ، π ، $\pi ٦$ ، ٠)

(٢) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{حا } ٢س}{٣س} =$

(٢ ، ٣ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$)

(٣) $\lim_{س \to 0^+} (\sqrt{س} + ٣) =$

(غير موجودة ، ٠ ، ٣ ، ٤)

(٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٣٢}{س^٣ - ٨} =$

(٤ ، $\frac{٥}{٣}$ ، ٠ ، $٦\frac{٢}{٣}$)

(٥) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - س - ٦}{س^٢ + س - ١٢} =$

($\frac{٥}{٧}$ ، $\frac{١}{٧}$ ، - ١ ، - ٥)

(٦) $\lim_{س \to \pi} \frac{\text{حا } \pi س}{\pi - س} =$

(١ ، $\pi^٢$ ، π ، π -)

أوجد النهايات الآتية:

(٧) $\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{س^٢ + س - ٢}$

(٨) $\lim_{س \to ٥} \frac{س - ٥}{س^٢ - ١٠س + ٢٥}$

(٩) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - ٢س + ١}{س^٣ + س^٢ - ٢}$

(١٠) $\lim_{س \to \frac{٣}{٢}} \frac{٢س^٢ + ٣س - ٩}{٢س - ٣}$

(١١) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٥ - ١}{س^٣ - ١}$

(١٢) $\lim_{س \to ٥} \frac{(س - ٣)^٥ - ٣٢}{س^٢ - ٥س}$

(١٣) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٤ - \sqrt{س + ١٥}}{١ - س^٢}$

(١٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٢٥ + س} - ٥}{\sqrt{١ + س} - ١}$

(١٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{٨س^٢ - ٣ \text{ حاس}}{س}$

(١٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - \text{حتا } ٢س}{٣س^٢}$

(١٧) إذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{د(س) - ٥}{س + ٣} = ٤$ فما قيمة $\lim_{س \to ٢} د(س)$

(١٨) إذا كان د(س) = { س - ١ لكل س ⩽ ٣ ، ٣ س - ٧ لكل س > ٣ } فأوجد:

أ) $\lim_{س \to -٣} د(س)$

ب) $\lim_{س \to ٣^+} د(س)$

ج) $\lim_{س \to ٣} د(س)$

(١٩) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س^٢ - ٢}{س^٢ + ١}$

(٢٠) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^٣ - ٥س}{س^٤ + ٣}$

(٢١) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س^٤ - ٢س + ١}{س^٣ + ٤}$

(٢٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س^{-١} + ٥}{٧ + ٩س^{-٢}}$

(٢٣) $\lim_{س \to \infty} (\frac{٢}{٣} - \frac{٣س}{٢س + ٧})$

(٢٤) $\lim_{س \to \infty} \frac{٥س - ٣}{\sqrt{٤س^٢ + ٧}}$

(٢٥) $\lim_{س \to \infty} \frac{١}{س} \sqrt{٤س^٢ - ٣}$

(٢٦) $\lim_{س \to \infty} (\sqrt{س + ١} - \sqrt{س})$

أوجد نهاية كل من الدوال المثلثية الآتية:

(٢٧) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{حا } ٣س}{٥س}$

(٢٨) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا } س}{٣س}$

(٢٩) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا } ٢س}{\text{حا } ٣س}$

(٣٠) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{حا}^{٢} ٤س}{٢س^{٢}}$

(٣١) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{حا } ٣س - \text{حا } ٢س}{٥س}$

(٣٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\pi - ٢س}{\text{حتا } س}$

(٣٣) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \frac{٣س}{\text{حا } س} & \text{لكل } س > ٠ \\ \text{حتا } ٣س & \text{لكل } س < ٠ \end{cases}$ فابحث وجود $\lim_{س \to 0}$ د(س)

(٣٤) إذا كان د(س) = $\begin{cases} \frac{\text{حا}(س - ١)}{س - ١} & \text{لكل } س < ١ \\ \text{ظا } \frac{\pi}{٤} س & \text{لكل } س > ١ \end{cases}$ فابحث وجود $\lim_{س \to ١}$ د(س)

(٣٥) أوجد قيمة الثابت أ لكى يكون للدالة د نهاية عندما س $\longrightarrow$ ٠

حيث د(س) = $\begin{cases} أ + \text{جتا } س & \text{عندما } س > ٠ \\ \frac{\text{ظا } ٢س}{أ س} & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$

(٣٦) ابحث اتصال الدالة د حيث د(س) = ٥ - |س - ٣| عند س = ٣

(٣٧) للدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} \frac{\sqrt{س + ٣} - ٢}{س^{٢} - ١} & \text{حيث } س \neq ١ \\ ك & \text{عندما } س = ١ \end{cases}$ أوجد قيمة ك؛ لكى تكون الدالة متصلة عند س = ١

(٣٨) أعد تعريف الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} س^{٣} + ٢س & \text{لكل } س < ١ \\ ٥س - ١ & \text{لكل } س > ١ \end{cases}$ بحيث تصبح متصلة عندما س = ١ إذا كان ذلك ممكنًا.

(٣٩) للدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} \frac{\text{حتا } ٢س - ١}{س^{٢}} & \text{حيث } س \neq ٠ \\ ك & \text{عندما } س = ٠ \end{cases}$ أوجد قيمة ك التى تجعل الدالة د متصلة عندما س = ٠

(٤٠) ابحث اتصال الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} ١ + \text{حا } س & \text{حيث } ٠ \leqslant س \leqslant \frac{\pi}{٢} \\ ١ - \text{حتا } ٢س & \text{حيث } س \leqslant \frac{\pi}{٢} \end{cases}$ على ع

(٤١) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} ٤س & \text{حيث } س \geqslant -١ \\ أ س + ب & \text{حيث } -١ < س < ٣ \\ -٢س & \text{حيث } س \leqslant ٣ \end{cases}$

متصلة على ع فما قيمة كل من أ ، ب؟

اختبار تراكمى

أكمل كلًّا مما يأتى:

(١) $س^{٢} - س - ٦ = (س - \ldots\ldots)(س + \ldots\ldots)$

(٢) $(\sqrt{\ }س^{٢} - ٣س - س)(\sqrt{\ }س^{٢} - ٣س + س) = \ldots\ldots$

(٣) $\frac{س^{٣} - ٢س^{٢} + ٥س - ٤}{س - ١} = \ldots\ldots$

(٤) $\frac{\text{حتا } \pi}{\pi} = \ldots\ldots$

(٥) $\frac{\text{حتا } \frac{\pi}{٤}}{\frac{\pi}{٢}} = \ldots\ldots$

(٦) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} \frac{٣س - ٢}{س} = \ldots\ldots$

(٧) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{س^{٢} - ٣س}{٢س} = \ldots\ldots$

(٨) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{حا } ٢س}{٥س} = \ldots\ldots$

(٩) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \frac{س^{٢} - ٣س + ٥}{٤ - ٣س^{٢}} = \ldots\ldots$

(١٠) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{١ \text{ حتا } س}{س^{٢}} = \ldots\ldots$

احسب النهايات الآتية:

(١١) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٢ \text{ حا } ٤س}{\text{حا } ٣س}$

(١٢) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{س^{٩} - ١}{١ - س^{٥}}$

(١٣) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -٣} \frac{س^{٢} + ٤س + ٣}{س^{٢} - ٩}$

(١٤) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٣} + ٢س^{٢} + س - ٢}{س^{٣} - ٢س^{٢} - س + ٢}$

(١٥) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} د(س)$ حيث $د(س) = \frac{س^{٢} + س}{|س + ١|}$

(١٦) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}} د(س)$ حيث $د(س) = \begin{cases} \frac{\text{ظتا } س}{\pi - ٢س} & \text{لكل } س < \frac{\pi}{٢} \\ \text{حا } (\pi - س) & \text{لكل } س > \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

ابحث اتصال كل من الدوال الآتية:

(١٧) $د(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} & \text{لكل } س \neq ٢ \\ \text{حا } (\pi - س) & \text{لكل } س = ٢ \end{cases}$

(١٨) $د(س) = \frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢} - ٥س + ٦}$ على ع

أ عند $س = ٢$ ب على ع

(١٩) إذا كان $د(س) = \begin{cases} س - ٢ & س < ٠ \\ س^{٢} & ٠ \leqslant س \leqslant ٢ \\ ٢س & س > ٢ \end{cases}$ فأوجد

أ $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} د(س)$ ب $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} د(س)$ ج $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} د(س)$

(٢٠) أوجد قيم أ التي تجعل $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} د(س)$ لها وجود حيث $د(س) = (\frac{١}{س - ١} - \frac{أ}{س^{٢} - ١})$

أوجد النهايات الآتية:

(٢١) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س + ٥}{٦س - ٨}$

(٢٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{٤س^{٢} + س}{٢س^{٣} - ٥}$

(٢٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{٥س^{٣} - ٢س^{٢} + ١}{١ - ٣س}$

(٢٤) $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٨]{س^{٢} + ٢}}{٣س - ٦}$

(٢٥) $\lim_{س \to \infty} (\sqrt[٨]{٥س^{٣} + ٥س^{٢}} - س^{٣})$

(٢٦) $\lim_{س \to \infty} (\sqrt[٨]{س^{٢} - ٣س} - س)$

(٢٧) ابحث اتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة:

أ $د(س) = \begin{cases} ٢س + ٣ & س \geq ٤ \\ \frac{١٦}{س} + ٧ & س < ٤ \end{cases}$ عند س = ٤

ب $د(س) = \begin{cases} \frac{١ - \text{حا}س}{س} & س < ٠ \\ \frac{\text{حا}س}{س} & س > ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

(٢٨) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} -١ & س \neq ٤ \\ ١ & س = ٤ \end{cases}$ ، $ر(س) = \begin{cases} ٤س - ١٠ & س \neq ٤ \\ -٦ & س = ٤ \end{cases}$

فابحث اتصال كل من الدوال الآتية عند س = ٤

أ د(س) ب ر(س) ج د(س) . ر(س)

د |د(س)| هـ ر(س) - ٦د(س) و ر(د(س))

(٢٩) أوجد قيم ك التى تجعل الدالة متصلة على ع

أ $د(س) = \begin{cases} ٧س - ٢ & س \geq ١ \\ -ك س^{٢} & س \leq ١ \end{cases}$

ب $د(س) = \begin{cases} ك س^{٢} & س \geq ٢ \\ ٢س + ك & س < ٢ \end{cases}$

ج $د(س) = \begin{cases} ٩ - س^{٢} & س \leq -٣ \\ \frac{ك}{س^{٢}} & س > -٢ \end{cases}$

(٣٠) أوجد قيمة ك، م التى تجعل الدالة الآتية متصلة على ع

$د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٥ & س \leq ٢ \\ م(س + ١) + ك & ٢ > س > -١ \\ ٢س^{٣} + س + ٧ & س \geq -١ \end{cases}$

(٣١) ادرس اتصال الدالة الآتية:

أ $د(س) = \frac{١}{\sqrt[٨]{س - ٢}}$ على مجالها

ب $د(س) = \frac{س - ٢}{|س| - ٢}$ على ع



الوحدة الرابعة

حساب المثلثات
trigonometry

مقدمة الوحدة

المصطلح المقابل لحساب المثلثات فى اللغة الإنجليزية هو Trigonometry وهى كلمة مشتقة من ثلاث كلمات لاتينية تعنى " قياس المثلث" وبواسطة هذا النوع من فروع الرياضيات يمكن أن نعالج ونتعرف على الأضلاع والزوايا غير المعروفة فى المثلث بمعلومية العناصر المعروفة منه ، وسوف تدرس فى هذه الوحدة بعض القوانين والعلاقات التى تربط بين أضلاع المثلث وزواياه.

ونشير هنا أن العالم الرياضى ليونارد إديلر (١٧٠٧ - ١٧٨٣) المولود بالقرب من بازل في سويسرا هو أول من استخدم الحروف الإنجليزية الصغيرة(a, b, c) لتشير إلى أطوال أضلاع المثلث والحروف الإنجليزية الكبيرة (A, B, C) لتشير لزواياه ، كما أنه استخدم الحرفين R, r ليدلا على نصفى قطرى الدائرة الداخلة والدائرة الخارجة للمثلث واستخدم الحرف S ليدل على نصف محيط المثلث ، كما توصل إلى القاعدة 4rRs = abc أى حاصل ضرب أطوال أضلاع المثلث الثلاثة يساوى ٤ مضروبة فى كل من طولى نصفى قطرى الدائرتين الداخلة والخارجة للمثلث ونصف محيطه.

لاحظ أننا سوف نستخدم الحروف أ ، ب ، جـ لتدل على أطوال أضلاع المثلث ، والحروف أ، ب، جـ لتدل على زواياه وكذلك الحرف ح ليدل على نصف محيط المثلث ، نق لتدل على طول نصف قطر الدائرة ، وقد نعبر عن نصف قطر الدائرة الداخلة $نق_1$ والدائرة الخارجة $نق_2$ إذا دعت الحاجة إلى ذلك وعليه تكون صورة القاعدة التى توصل إليها إديلر هى كالآتى أ ، ب ، جـ = ٤ $نق_1$ $نق_2$ ح .

أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف ، يستنتج قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث ، والتى تنص على : فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها .
- يستخدم قانون (قاعدة) الجيب فى إيجاد أطوال أضلاع أى مثلث.
- يستخدم قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث فى إيجاد قياسات زوايا هذا المثلث (يوجد حلان لزاوية مجهولة).
- يستنتج العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث وطول نصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث، ويستخدمها فى حل تمارين متنوعة.
- يتعرف ، يستنتج قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث .
- يستخدم قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث فى إيجاد طول ضلع مجهول فى هذا المثلث .
- يستخدم قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث فى إيجاد قياس زاوية مجهولة فى هذا المثلث .
- يستخدم قانوني (قاعدتي) الجيب وجيب التمام لأى مثلث فى حل هذا المثلث فى الحالات الآتية :

إذا علم فى المثلث قياسا زاويتين ، وطول أحد أضلاعه.

إذا علم فى المثلث طولا ضلعين ، وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

إذا علم فى المثلث أطوال أضلاعه الثلاثة.

- يستخدم الآلة الحاسبة فى حل تمارين وأنشطة متنوعة على قانوني (قاعدتي) الجيب وجيب التمام لأى مثلث.



المصطلحات الأساسية

- حساب المثلثات trigonometry
- قاعدة الجيب sine rule
- زاوية حادة acute angle
- زاوية منفرجة obtuse angle
- زاوية قائمة right angle
- حالة غامضة The ambiguous case
- حلول ممكنة possible solutions
- حل وحيد unique solution
- أقصر ضلع shortest side
- أطول ضلع longest side
- مساحة المثلث The area of the triangle
- أطوال أضلاع المثلث The lengths of te sides of the triangle
- زاوية مقابلة لضلع the opposite angle of a side
- أضلاع مجهولة unkown lenghts
- زوايا مجهولة unknown angles
- أصغر زاوية smallest angle
- أكبر زاوية largest angle
- قاعدة جيب التمام the cosine rule

دروس الوحدة

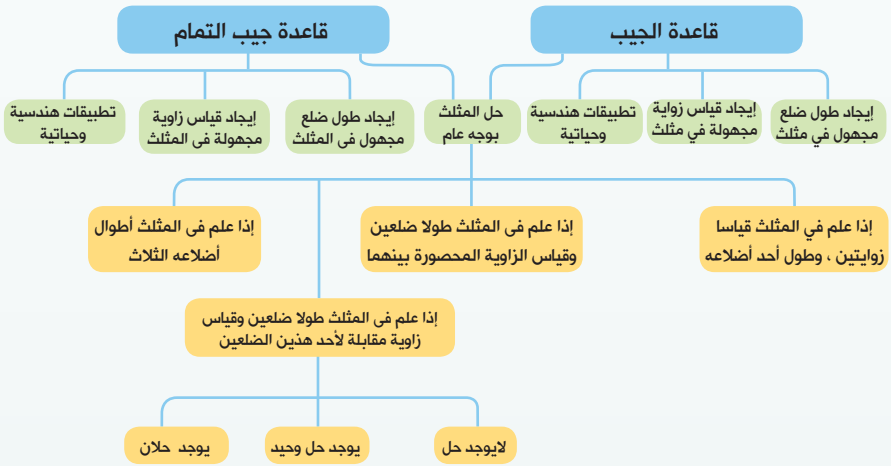
الدرس (١ - ٤): قانون (قاعدة) الجيب.

الدرس (٢ - ٤): قانون (قاعدة) جيب التمام.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية

مخطط تنظيمى للوحدة



الدرس ١

قانون (قاعدة) الجيب
The sine rule

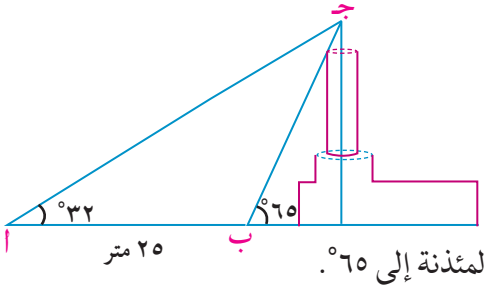
سوف تتعلم
- قانون (قاعدة) الجيب لاى مثلث.
- استخدام قانون (قاعدة) الجيب فى حل المثلث.
- نمذجة وحل مشكلات رياضية باستخدام قاعدة الجيب
- العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لاى مثلث وطول نصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث وحل مسائل عليها.

المصطلحات الأساسية
- حساب المثلثات trigonometry
- قاعدة الجيب sine rule
- زاوية حادة acute angle
- زاوية منفرجة obtuse angle
- زاوية قائمة right angle
- حالة غامضة The ambiguous case

الأدوات المستخدمة
- آله حاسبة علمية

سبق أن تعلمت كيفية استخدام المثلث القائم الزاوية فى إيجاد ارتفاع مئذنة عن سطح الأرض وانت تبعد عنها مسافة معلومة دون أن تقوم بالقياس الفعلى لطول هذه المئذنة، والآن سوف تتعلم طرقًا لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا مثلث غير قائم الزاوية.

نشاط



أراد حسام إيجاد ارتفاع المئذنة، وقد لاحظ أنه من النقطة ا تكون زاوية ارتفاع قمة المئذنة ٣٢°، وعندما اقترب مسافة ٢٥مترًا من قاعدة المئذنة وأصبح عند النقطة ب، زادت زاوية ارتفاع قمة المئذنة إلى ٦٥°.

قم بعمل قياس للرسم، ثم قس ارتفاع المئذنة (المقياس هو ١ سم لكل ٥ أمتار). تأكد من صحة قياساتك بعد دراستك لطرق حل المثلث غير قائم الزاوية، و إحدى هذه الطرق هو قانون (قاعدة) الجيب.

تعلم

قانون (قاعدة) الجيب **البرهان لا يمتحن فيه الطالب** *The sine rule*

يمكن استخدام قانون مساحة سطح المثلث؛ لاستنتاج قانون الجيب الذي يبين العلاقة بين أطوال أضلاع مثلث وجيوب الزوايا المقابلة كالآتي:

مساحة المثلث ا ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × ا س

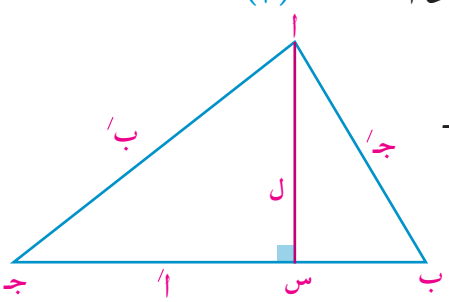
ولكن ا س = جـَ حا ب (فى المثلث ا س ب)

∴ مساحة المثلث ا ب جـ = $\frac{١}{٢}$ اَ × جـَ حا ب (١)

∵ ا س = بَ حا جـ (فى المثلث ا س جـ)

∴ مساحة المثلث ا ب جـ = $\frac{١}{٢}$ اَ × بَ حا جـ (٢)

بالمثل مساحة المثلث ا ب جـ = $\frac{١}{٢}$ بَ × جـَ حا ا (٣)



من (١)، (٢)، (٣) يكون:

$\frac{١}{٢}$ بَ جـَ حا ا = $\frac{١}{٢}$ جـَ اَ حا ب = $\frac{١}{٢}$ اَ بَ حا جـ

أى أن: بَ جـَ حا ا = جـَ اَ حا ب = اَ بَ حا جـ

بالقسمة على أ ب جـ يكون $\frac{\text{حا أ}}{\text{أ}} = \frac{\text{حا ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{حا جـ}}{\text{جـ}}$

أى أن: $\frac{\text{أ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{حا جـ}}$ (وهو المطلوب)

فكر:

١ - أثبت قانون الجيب عندما يكون المثلث منفرج الزاوية.

إيجاد طول أكبر ضلع فى المثلث

مثال

(١) أوجد طول أكبر ضلع فى المثلث أ ب جـ الذى فيه ق(∠أ) = ٣٣′ ٥٤°، ق(∠ب) = ٢٢′ ٤٩°، أ = ١٢٤,٥سم

الحل

أكبر ضلع في المثلث هو المقابل لأكبر زاوية (التباين في المثلث)

ق(∠جـ) = ١٨٠° - [ق(∠أ) + ق(∠ب)]

= ١٨٠° - [٣٣′ ٤٥° + ٢٢′ ٤٩°] = ٥′ ٧٦°

∴ أكبر ضلع هو جـ لأنه يقابل أكبر زاوية فى المثلث وهى زاوية جـ

∵ $\frac{\text{أ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{حا جـ}}$ ∴ $\frac{٢٤,٥}{\text{حا ٣٣′ ٥٤°}} = \frac{\text{جـ}}{\text{حا ٥′ ٧٦°}}$

∴ جـ = $\frac{٢٤,٥ \text{ حا ٥′ ٧٦°}}{\text{حا ٣٣′ ٥٤°}}$ = ١٤٨,٤سم

حاول أن تحل

(١) أوجد طول أصغر ضلع فى المثلث أ ب جـ الذى فيه ق(∠أ) = ٤٣°، ق(∠ب) = ٦٥° ، جـ = ٨,٤سم

حل المثلث باستخدام قانون الجيب *Solving the triangle using the sine rule*

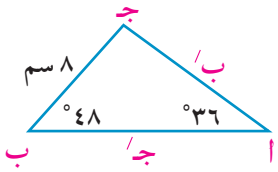
يسمح لنا قانون الجيب بحل المثلث إذا علم فيه طول ضلع وقياس زاويتين (ومن ثم إيجاد قياس الزاوية الثالثة).

حل المثلث بمعلومية طول أحد أضلاعه وقياسي زاويتين:

مثال

(٢) حل المثلث أ ب جـ حيث أ = ٨سم ، ق(∠أ) = ٣٦° ، ق(∠ب) = ٤٨°

الحل



ق(∠جـ) = ١٨٠° - (٣٦° + ٤٨°) = ٩٦°

∵ $\frac{\text{حا أ}}{\text{أ}} = \frac{\text{حا ب}}{\text{ب}}$ ∴ $\frac{\text{حا ٣٦°}}{٨} = \frac{\text{حا ٤٨°}}{\text{ب}}$

∴ ب = $\frac{٨ \text{ حا ٤٨°}}{\text{حا ٣٦°}}$ ≃ ١٠,١١٤سم.

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة، تأكد أولًا من تهيئة الحاسبة لاستخدام التقدير الستيني لقياسات الزوايا ثم اضغط المفاتيح من اليسار إلى اليمين:

ابدأ ← 8 × Sin 4 8) ÷ Sin 3 6 =

$\therefore \frac{\text{حا أ}}{\text{أ}} = \frac{\text{حا جـ}}{\text{جـ}}$ $\qquad \therefore \frac{\text{حا ٣٦°}}{٨} = \frac{\text{حا ٩٦°}}{\text{جـ}}$

$\therefore$ جـ $= \frac{٨ \text{ حا } ٩٦°}{\text{حا } ٣٦°} \simeq ١٣,٥٣٥$ سم

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة كالآتى:

إبدأ ← 8 × Sin 9 6) ÷ Sin 3 6 =

> **تذكر أن**
>
> للمثلث ٦ عناصر ثلاثة أضلاع، ثلاثة زوايا مقابلة لها، وحل المثلث يعنى إيجاد أطوال أضلاعه وقياسات زواياه بشرط أن يكون معلوم منها ثلاثة عناصر أحدها على الأقل طول ضلع فى المثلث لتمكننا من رسم المثلث.

حاول أن تحل

(٢) حل المثلث أ ب جـ حيث أَ = ٨سم ، ق(∠أ) = ٦٠° ، ق(∠ب) = ٤٠°

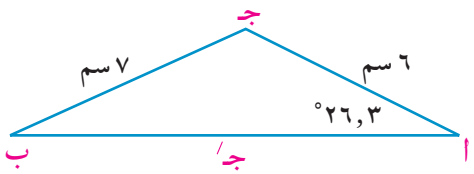
حل المثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس زاوية ليست محصورة بينهما

يسمح لنا قانون الجيب بحل المثلث بمعلومية طول ضلعين فيه، وقياس زاوية ليست محصورة بينهما.

مثال

(٣) حل المثلث أ ب جـ حيث أَ = ٧سم، بَ = ٦سم ، ق(∠أ) = ٢٦,٣°

الحل



المطلوب هو إيجاد جـَ ، ق(∠ب) ، ق(∠جـ)

$\therefore \frac{\text{أ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}}$ (قانون الجيب) $\qquad \frac{\text{حا ٢٦,٣°}}{٧} = \frac{\text{حا ب}}{٦}$

يلاحظ من هذه العلاقة أن ق (∠ب) < ٢٦,٣°

$\therefore$ حا ب $= \frac{٦ \text{ حا } ٢٦,٣°}{٧}$

$\therefore$ ق (∠ب) = ٢٢,٣١٩° (∠ب حادة) (لأن بَ < أَ)

ق (∠جـ) = ١٨٠ - [ق(∠أ) + ق(∠ب)]

= ١٨٠ - [٢٦,٣° + ٢٢,٣١٩°] = ١٣١,٣٨°

وأخيرًا نوجد جـَ

$\therefore \frac{\text{أ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{حا جـ}}$ فيكون $\therefore \frac{\text{حا أ}}{\text{أ}} = \frac{\text{حا جـ}}{\text{جـَ}}$ (قانون الجيب)

$\therefore \frac{\text{حا ٢٦,٣°}}{٧} = \frac{\text{حا ١٣١,٣٨°}}{\text{جـَ}}$ $\qquad \therefore$ جـَ $= \frac{٧ \text{ حا } ١٣١,٣٨°}{\text{حا } ٢٦,٣°} \simeq ١١,٨٥٤$ سم

حاول أن تحل

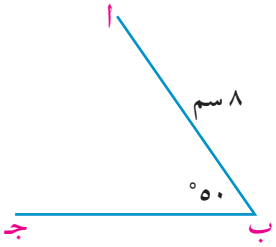
(٣) حل المثلث أ ب جـ حيث أَ = ١٧سم ، بَ = ١١سم ، ق(∠أ) = ٣٢°

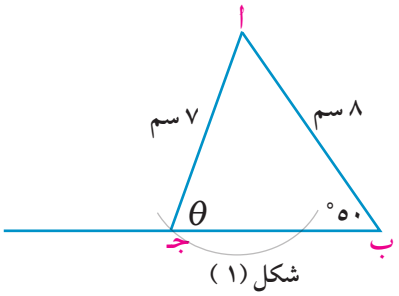
تعلم

الحالة الغامضة فى قانون (قاعدة) الجيب

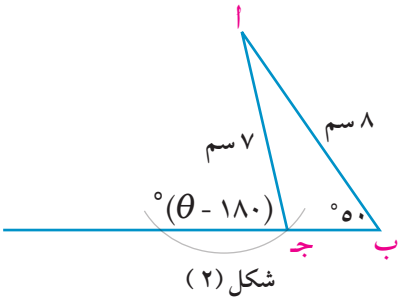
The ambiguous case of the sine rule

إذا كنت تحاول رسم مثلث من معلومات معطاة، فإنه من المحتمل أن تجد أكثر من مثلث يمكن رسمه، افترض أنك تريد رسم المثلث أ ب جـ الذى فيه أ ب = ٨سم، أ جـ = ٧سم، ق(∠أ ب جـ) = ٥٠°، فإنك سوف تبدأ برسم خط يمثل القاعدة له نهاية عند ب، ثم نرسم زاوية قياسها ٥٠°، ثم قياس ٨سم لتحديد موضع النقطة أ وذلك كما موضح بالشكل، ولإكمال الإنشاء الهندسى، ارسم قوسًا طول نصف قطر دائرته ٧سم من النقطة أ يقطع خط القاعدة فى موضعين، وهذا ما يوضح أن هناك مثلثين ممكن أن يحققا المعلومات المعطاة فى المسألة.





شكل (١)



شكل (٢)

إذا إستخدمت قاعدة الجيب لإيجاد قياس الزاوية جـ، فسوف تسجل آلتك الحاسبة الزاوية الحادة θ وهو ما يمثل الشكل (١) أعلاه، ونلاحظ أن جيب الزاوية $(180 - \theta)^\circ$ لها أيضًا نفس القيمة وهو ما يمثله الشكل (٢)، لذلك هناك حلان مختلفان للمثلث، وهذا ما يسمى بالحالة الغامضة لقانون الجيب The ambiguous case of the sine rule فعند استخدام قانون الجيب لإيجاد قياس زاوية مجهولة، يجب أن تكون متيقظًا لإمكانية وجود الحلين.

مثال الحالة الغامضة لقانون (قاعدة) الجيب (يوجد حلان لزاوية مجهولة)

(٤) فى المثلث أ ب جـ، أ ب = ٨سم، أ جـ = ٧سم، ق(∠أ ب جـ) = ٥٠° استخدم قانون الجيب لإيجاد ق(∠أ جـ ب). أعط إجابتك مقربًا لأقرب جزء من عشرة من الدرجة.

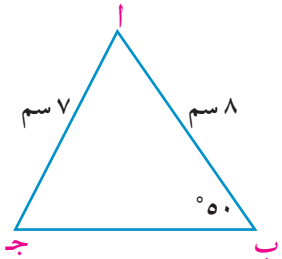
الحل

باستخدام قانون الجيب يكون: $\frac{٧}{\text{حا}\ ٥٠^\circ} = \frac{٨}{\text{حا}\ \text{جـ}}$ من هذه العلاقة يلاحظ أن ق(∠حـ) < ٥٠°

$\therefore$ حا جـ $= \frac{٨\ \text{حا}\ ٥٠^\circ}{٧} = ٠,٨٧٥٤٧٩$

$\therefore$ ق(∠جـ) = ٦١,١٠١٧٦°

= ٦١,١° (لأقرب جزء من عشرة من الدرجة).



وهى القيمة الأولى (الإمكانية الأولى) لقياس الزاوية جـ، وتكون القيمة الأخرى (الإمكانية الثانية) هى:

١٨٠° - ٦١,١° = ١١٨,٩°

فيكون ق(∠أ جـ ب) هو ٦١,١° أو ١١٨,٩°

حاول أن تحل

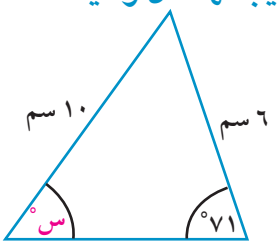
٤ فى المثلث أ ب جـ، ب جـ = ١٢سم، أ ب = ١١,٥سم، و(∠أ جـ ب) = ٦٨°
استخدم قانون الجيب لإيجاد و(∠ب أ جـ) مقربًا إجابتك لأقرب جزء من عشرة من الدرجة.

لاحظ أن

ليست كل المسائل المشابهة لمثال (٥) تنتمى للحالة الغامضة لقانون الجيب، فقد تجد أحيانًا بعض المعلومات المتضمنة بالسؤال قد تسمح لك باستبعاد أحد الحلين الممكنين فتذكر أن:
- أصغر ضلع فى المثلث دائمًا ما يقابل أصغر زاوية.
- أكبر ضلع فى المثلث دائمًا ما يقابل أكبر زاوية.

مثال **حالة غامضة لقانون (قاعدة) الجيب لها حل وحيد**

٥ أوجد قيمة س فى المثلث المقابل:
(مقربًا لأقرب جزء من عشرة من الدرجة).



الحل

باستخدام قانون الجيب

$\frac{١٠}{\text{حا } ٧١^\circ} = \frac{٦}{\text{حا س}}$ من هذه العلاقة يلاحظ أن س < ٧١°

∴ حا س = $\frac{٦ \times \text{حا } ٧١^\circ}{١٠}$ = ٠,٦٠٣٢٣٧

س = ٣٤,٥٦٢٩٤°

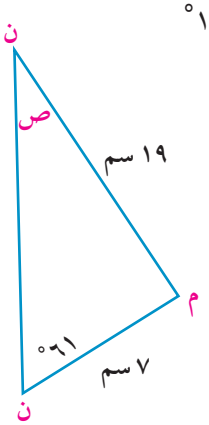
= ٣٤,٦° (لأقرب جزء من عشرة من الدرجة).

كما نلاحظ أن: القيمة الأخرى لـ س وهى ١٨٠° - ٣٤,٦° = ١٤٥,٤° غير ممكنة حيث إنه إذا أضيفت هذه القيمة لـ ٧١° سوف يصبح الناتج أكبر من ١٨٠°، لذا هناك قيمة واحدة ممكنة لـ س وهى س = ٣٤,٦°

يمكنك أيضًا ملاحظة أن: ١٠سم أكبر من ٦سم، وأن الزاوية ٧١° (التى تقابل الضلع الذى طوله ١٠سم) يجب أن تكون أكبر من س (التى تقابل الضلع الذى طوله ٦سم) لذا نستبعد القيمة ١٤٥,٤°

حاول أن تحل

٥ أوجد قيمة ص فى المثلث المقابل
(مقربًا لأقرب جزء من عشرة من الدرجة).



مثال **(حل المثلث فى حالة وجود حلين لزاوية مجهولة**

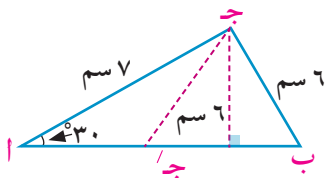
٦ حل المثلث أ ب جـ حيث أَ = ٦سم، بَ = ٧سم ، و(∠أ) = ٣٠°

الحل

يوضح الشكلان التاليان أن هناك مثلثان ممكنان، ففى الشكل (١) الزاوية ب هى زاوية حادة، وفى الشكل (٢) الزاوية ب هى زاوية منفرجة.

لاحظ أن بَ > أَ لذلك و(∠ب) > و(∠أ) أى و(∠ب) > ٣٠°

أولًا: حل المثلث أ ب جـ حيث ∠ب حادة



شكل (١)

∴ $\frac{\text{حا أ}}{\text{أَ}} = \frac{\text{حا ب}}{\text{بَ}}$ (قانون الجيب)

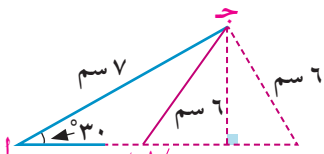
∴ $\frac{\text{حا } ٣٠^\circ}{٦} = \frac{\text{حا ب}}{٧}$ ∴ حا ب = $\frac{٧ \text{ حا } ٣٠^\circ}{٦}$

$\text{و}(\angle ب) = \text{حا}^{-1}\left(\frac{٧\ \text{حا}\ ٣٠^\circ}{٦}\right)$ ، $٠^\circ < \text{و}(\angle ب) < ٩٠^\circ$

$\simeq ٣٥,٦٨٥^\circ \simeq ٣٥^\circ\ ٤١'\ ٦''$

$\text{و}(\angle جـ) \simeq ١٨٠^\circ - [٣٠^\circ + ٣٥,٦٨٥^\circ]$

$= ١١٤,٣١٤^\circ \simeq ١١٤^\circ\ ١٨'\ ٥٠''$



شكل (٢)

$\therefore \frac{\text{حا ا}}{\text{أ}} = \frac{\text{حا جـ}}{\text{جـ}}$ (قانون الجيب)

$\therefore \frac{\text{حا}\ ٣٠^\circ}{٦} = \frac{\text{حا}\ ١١٤,٣١٤^\circ}{\text{جـ}}$ $\therefore$ جـ $= \frac{٦\ \text{حا}\ ١١٤,٣١٤^\circ}{\text{حا}\ ٣٠^\circ} = ١٠,٩٣٥$ سم

ثانيًا: حل Δ ا ب جـ حيث $\angle$ ب منفرجة؛ المعادلات مشابهة للسابقة وهذا يؤدى إلى:

$\text{حا ب} = \frac{٧\ \text{حا}\ ٣٠^\circ}{٦}$

$\text{و}(\angle ب) = ١٨٠^\circ - \text{حا}^{-1}\left(\frac{٧\ \text{حا}\ ٣٠^\circ}{٦}\right)$ حيث $٩٠^\circ < \text{و}(\angle ب) < ١٨٠^\circ$

$\simeq ١٤٤,٣١٤^\circ \simeq ١٤٤^\circ\ ١٨'\ ٥٠''$

$\text{و}(\angle جـ) = ١٨٠^\circ - (١٤٤,٣١٤^\circ + ٣٠^\circ) = ٥,٦٨٥^\circ \simeq ٥^\circ\ ٤١'\ ٦''$

جـ $= \frac{\text{أ حا جـ}}{\text{حا ا}} = \frac{٦\ \text{حا}\ ٥,٦٨٥^\circ}{\text{حا}\ ٣٠^\circ} = ١,١٨٨$ سم

أى أن فى المثلث أ ب جـ: جـ $= ١٠,٩٤$ ، $\text{و}(\angle ب) = ٣٥^\circ\ ٤١'\ ٦''$ ، $\text{و}(\angle جـ) = ١١٤^\circ\ ١٨'\ ٥٠''$

حيث $٠^\circ < \text{و}(\angle ب) < ٩٠^\circ$

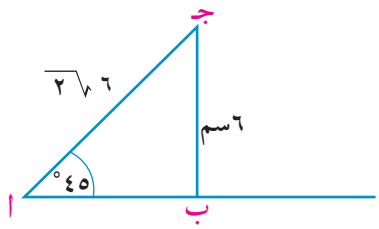
أو بالمثل جـ $= ١,١٨٨$ سم ، $\text{و}(\angle ب) = ١١٤^\circ\ ١٨'\ ٥٠''$ ، $\text{و}(\angle جـ) = ٥^\circ\ ٤١'\ ٦''$

حيث $٩٠^\circ < \text{و}(\angle ب) < ١٨٠^\circ$

مثال

(٧) حل المثلث أ ب جـ حيث أ $= ٦$ سم، ب $= ٦\sqrt{٢}$ ، $\text{و}(\angle ا) = ٤٥^\circ$

الحل



$\therefore \frac{\text{أ}}{\text{حا ا}} = \frac{\text{ب}}{\text{حا ب}}$

$\therefore \frac{٦}{\text{حا}\ ٤٥^\circ} = \frac{٦\sqrt{٢}}{\text{حا ب}}$

$\therefore$ حا ب $= \frac{٦\sqrt{٢}\ \text{حا}\ ٤٥^\circ}{٦} = ١$

$\therefore \text{و}(\angle ب) = ٩٠^\circ$ $\therefore \text{و}(\angle حـ) = ٤٥^\circ$ $\therefore$ أ $=$ جـ $= ٦$ سم

$\therefore$ المثلث أ ب جـ أ $=$ جـ $= ٦$ سم، $\text{و}(\angle حـ) = ٤٥^\circ$ **ويلاحظ أن في هذه الحالة يكون الحل وحيدًا**

حاول أن تحل

(٦) أ حل المثلث أ ب جـ الذي فيه: $\text{و}(\angle ا) = ٦٤$ ، أ $= ١٦$ سم ، ب $= ١٧$ سم. (يوجد حلان)

ب حل المثلث أ ب جـ حيث أ $= ٦$ سم، ب $= ١٢$ سم، $\text{و}(\angle ا) = ٣٠^\circ$

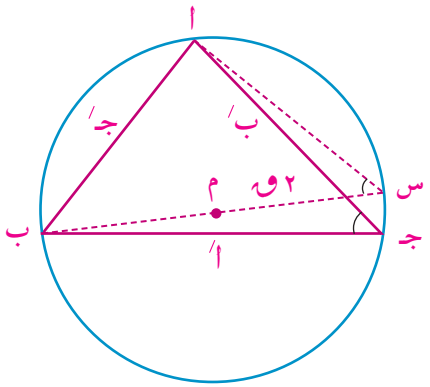
تطبيقات هندسية لقانون الجيب *Geometrical applications on the sine rule*

تمرين مشهور

فى أى مثلث أ ب جـ يكون: $\frac{أ}{\text{حا}أ} = \frac{ب}{\text{حا}ب} = \frac{جـ}{\text{حا}جـ} = ٢و$

حيث و طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ

البرهان:-



أ إذا كانت الدائرة تمر برؤوس مثلث حاد الزوايا

نرسم الدائرة التى تمر برؤوس المثلث أ ب جـ الحاد الزوايا ثم نرسم القطر $\overline{ب س}$ والوتر $\overline{س أ}$

∵ ق(∠ب أ س) = ٩٠° ، ق(∠أ س ب) = ق(∠أ جـ ب)

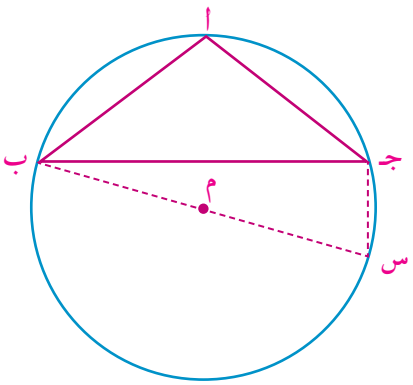
∴ حا س = $\frac{أ ب}{ب س}$ ، حا جـ = $\frac{أ ب}{ب س}$

فيكون أ ب = ب س حا جـ

∴ $\frac{جـ}{\text{حا}جـ}$ = ٢و حا جـ **أى أن:** $\frac{جـ}{\text{حا}جـ}$ = ٢و

بطريقة مماثلة يمكن اثبات أن: $\frac{أ}{\text{حا}أ}$ = ٢و ، $\frac{ب}{\text{حا}ب}$ = ٢و

∴ $\frac{أ}{\text{حا}أ} = \frac{ب}{\text{حا}ب} = \frac{جـ}{\text{حا}جـ}$ = ٢و



ب إذا كانت الدائرة تمر برؤوس مثلث منفرج الزاوية

فى المثلث أ ب جـ ، ∠أ منفرجة، فيكون:

ق(∠ب س جـ) = ١٨٠° - ق(∠أ)

حا (١٨٠° - أ°) = $\frac{ب جـ}{ب س}$

حا أ = $\frac{أ}{٢و}$

∴ $\frac{أ}{\text{حا}أ}$ = ٢و

بطريقة مماثلة يمكن إثبات أن: $\frac{ب}{\text{حا}ب}$ = ٢و ، $\frac{جـ}{\text{حا}جـ}$ = ٢و

∴ $\frac{أ}{\text{حا}أ} = \frac{ب}{\text{حا}ب} = \frac{جـ}{\text{حا}جـ}$ = ٢و

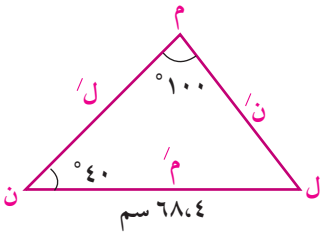
مثال

٨ مثلث ل م ن فيه مَ = ٦٨,٤سم ، ق(∠م) = ١٠٠° ، ق(∠ن) = ٤٠° أوجد

أ لَ ب طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ل م ن

جـ مساحة سطح المثلث ل م ن

الحل



و(∠ل) = ١٨٠° - (١٠٠° + ٤٠°) = ٤٠°

$\frac{\text{ل}}{\text{حا ٤٠°}} = \frac{٦٨,٤}{\text{حا ١٠٠°}}$ (قانون الجيب)

ل = $\frac{٦٨,٤}{\text{حا ١٠٠°}} \times \text{حا ٤٠°} \simeq$ ٤٤,٦٤سم وهو المطلوب (١)

∵ $\frac{\text{م}}{\text{حا م}} = 2\text{نق}$

∴ $\frac{٦٨,٤}{\text{حا ١٠٠°}} = 2\text{نق}$

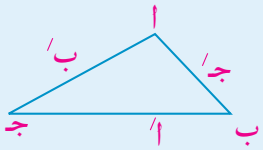
أى أن نق = $\frac{٦٨,٤}{2 \text{ حا ١٠٠°}} \simeq$ ٣٤,٧٢ سم وهو المطلوب (٢)

مساحة المثلث ل م ن = $\frac{١}{٢}$ م ل × ل ن × حا ن

= $\frac{١}{٢} \times ٦٨,٤ \times ٤٤,٦٤ \times \text{حا ٤٠°} = ١,٩٨١$ سم^٢

تذكر أن

مساحة سطح المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي أى ضلعين × جيب الزاوية بينهما



مساحة المثلث أ ب جـ

= $\frac{١}{٢}$ أ ب × ب جـ × حا جـ

= $\frac{١}{٢}$ أ جـ × ب جـ × حا ب

= $\frac{١}{٢}$ ب جـ × أ جـ × حا أ

حاول أن تحل

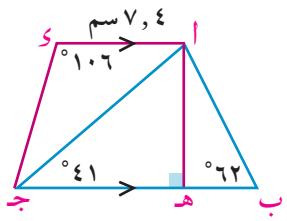
(٧) حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أ = ٢٥سم ، و(∠ب) = ١٨ ٣٥° ،
و(∠جـ) = ٤٢ ١٠٣° ثم أوجد مساحته، وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

مثال

(٩) أ ب جـ ء شبه منحرف فيه أء // ب جـ ، أء = ٧,٤سم ، و(∠ب) = ٦٢° ، و(∠ء) = ١٠٦° ،
و(∠أ جـ ب) = ٤١°. أوجد

أولًا: طول كل من أجـ، ب جـ **ثانيًا:** مساحة سطح شبه المنحرف أ ب جـ ء لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل



فى المثلث أ جـ ء

∵ و(∠ء أ جـ) = و(∠أ جـ ب) = ٤١° (بالتبادل)

، و(∠أ جـ ء) = ١٨٠° - (٤١° + ١٠٦°) = ٣٣°

∵ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{حا ١٠٦°}} = \frac{٧,٤}{\text{حا ٣٣°}}$ ∴ أ جـ = $\frac{٧,٤ \times \text{حا ١٠٦°}}{\text{حا ٣٣°}} =$ ١٣,٠٦سم

في المثلث أ ب جـ

و(∠ب أ جـ) = ١٨٠° - (٦٢° + ٤١°) = ٧٧°

∵ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{حا ٧٧°}} = \frac{١٣,٠٦}{\text{حا ٦٢°}}$ ∴ ب جـ = $\frac{١٣,٠٦ \times \text{حا ٧٧°}}{\text{حا ٦٢°}} =$ ١٤,٤١سم

∵ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}} = \text{حا ٤١°}$ ∴ أ هـ = ١٣,٠٦ × حا ٤١° = ٨,٥٦٨سم

∵ مساحة سطح شبه المنحرف = طول القاعدة المتوسطة × الارتفاع.

= $\frac{\text{أء} + \text{ب جـ}}{٢} \times \text{أ هـ} = \left(\frac{٧,٤ + ١٤,٤١}{٢}\right) \times ٨,٥٦٨ =$ ٩٢,٤٣٤سم$^٢ \approx$ ٩٣سم^٢

٩ حاول أن تحل

(٨) أ ب جـ ء شكل رباعي فيه جـ ء = ١٠٠سم ، ق(∠ب جـ أ) = ٣٦° ، ق(∠ب ء أ) = ٥٥° ، ق(∠ب جـ ء) = ٨٥° ، ق(∠جـ ء أ) = ٨٧° ، أوجد طول كل من $\overline{ب ء}$ ، $\overline{أ جـ}$ لأقرب سنتيمتر.

تمـارين الدرس الأول

أكمل كل مما يأتي:

(١) فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع

(٢) فى المثلث أ ب جـ إذا كان ٢ حا أ = ٣ حا ب = ٤ حا جـ فإن أَ : بَ : جـَ = ...

(٣) أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع، طول ضلعه ١٠√٢سم، فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث = ...

(٤) مثلث أ ب جـ فيه ق(∠أ) = ٦٠° ، ق(∠جـ) = ٤٠° و جـَ = ٤,٨سم فإن أَ = ... سم

(٥) في المثلث أ ب جـ يكون $\frac{٢ ب}{حا ب}$ = ... ق

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:-

(٦) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ الذى فيه ق(∠أ) = ٣٠° ، أَ = ١٠سم هو

أ ١٠سم ب ٢٠سم جـ ٥سم د ٤٠سم

(٧) إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ يساوى ٤سم ، ق(∠أ) = ٣٠° فإن أَ هو

أ ٤سم ب ٢سم جـ ٤√٣ د $\frac{١}{١٦}$

(٨) فى المثلث أ ب جـ يكون المقدار ٢ ق حا أ مساويًا

أ أَ ب بَ جـ حـَ د ق(△أ ب جـ)

(٩) إذا كان ق نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث س ص ع فإن $\frac{٢ صَ}{حا ص}$ يساوى

أ ق ب ٢ق جـ $\frac{١}{٢}$ ق د ٤ق

(١٠) △ل م ن فيه، ق(∠ل) = ٣٠° ، م ن = ٧سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه تساوى

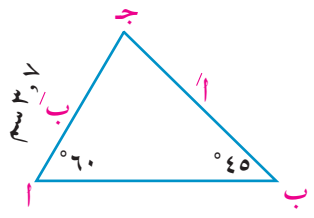
أ ٧سم ب ٣,٥سم جـ ١٤سم د $\frac{١٤}{٣\sqrt{}}$

(١١) فى المثلث س ص ع إذا كان ٢ حا س = ٣ حا ص = ٤ حا ع فإن سَ : صَ : عَ تساوى

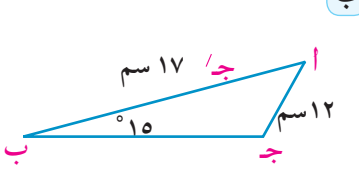
أ ٢ : ٣ : ٤ ب ٦ : ٤ : ٣ جـ ٣ : ٤ : ٦ د ٤ : ٣ : ٢

حل كل مثلث مما يلى:

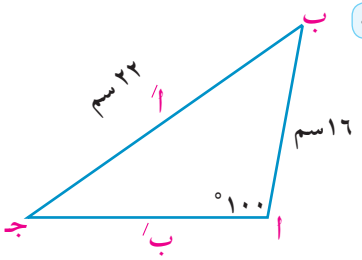
أ



ب



جـ



(١٢) حل المثلث أ ب جـ في كل مما يلزني

أ) و(∠أ) = ٤٠°، و(∠ب) = ٣٠°، بَ = ١٠سم

ب) و(∠أ) = ٥٠°، أَ = ٤سم، بَ = ٣ سم

ج) و(∠ب) = ٣٣°، بَ = ٧سم، جـَ = ١٠ سم

د) و(∠جـ) = ١١٦°، جـَ = ١٢سم، أَ = ١٠ سم

(١٣) حل المثلث أ ب جـ في كل مما يأتي:

أ) و(∠أ) = ٣٢°، أَ = ١٧سم، بَ = ١١سم

ب) و(∠أ) = ٤٩°، أَ = ٣٢سم، بَ = ٣٨سم

ج) و(∠ب) = ٧٠°، بَ = ١٤سم، جـَ = ١٤سم

د) و(∠جـ) = ١٠٣°، بَ = ٤٦سم، جـَ = ٦١سم

(١٤) في كل من أ، ب هل يمكن تكوين مثلثا باستخدام القياسات المعطاة؟ حل هذا المثلث:

أ) و(∠ب) = ٣٨°، بَ = ٢١سم، جـَ = ٢٥سم

ب) و(∠جـ) = ٦٨°، أَ = ١٩سم، جـَ = ١٨سم

(١٥) أ ب جـ مثلث فيه و(∠أ) = ٦٠°، و(∠ب) = ٤٥°، أثبت أن: أَ : بَ : جـَ = ٢ : $\sqrt{٦}$: $\sqrt{٣}$ + ١

(١٦) أ ب جـ متوازي أضلاع فيه أ ب = ١٩,٧٧سم وقطراه $\overline{أجـ}$، $\overline{بء}$ يصنعان مع ضلعه $\overline{أب}$ زاويتين مقدارهما ٣٦ ٢٢′ °، ٤٤ ٥٨′ °، أوجد طولي القطرين.

(١٧) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٨,٣٥٦سم، و(∠أ) = ٤١ ٢٠′ °، و(∠ب) = ٥٩ ١٧′ °، أوجد:

أ) بَ

ب) طول العمود النازل من جـ على $\overline{أب}$

(١٨) أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{أء}$ // $\overline{بجـ}$، أ ء = ١٠,٧سم، و(∠ء) = ١٠٠°، و(∠ب) = ٦١ ١٩′ °، و(∠جـ أ ء) = ٣٣ ٥٠′ °، أوجد طول كل من $\overline{أجـ}$، $\overline{بجـ}$

(١٩) أ ب جـ ء شكل رباعي فيه و(∠ب جـ ء) = ٨٥°، و(∠جـ ء أ) = ٨٧°، و(∠ب جـ أ) = ٣٦°، و(∠ب ء أ) = ٥٥° جـ ء = ١٠٠٠ متر أوجد طول كل من $\overline{بء}$، $\overline{أب}$ لأقرب متر.

(٢٠) أ ب جـ مثلث فيه حا جـ = ٠,٣، جـَ = ١٤سم، أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث من الخارج (اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

(٢١) أ ب جـ مثلث فيه أَ = ٥٨، و(∠ب) = ٣٨°، (∠جـ) = ٦٢° أوجد طول العمود النازل من أ على أَ.

(٢٢) أ ب جـ مثلث فيه ∠أ منفرجة، ظا ب = $\frac{١}{٢\sqrt{٦}}$، بَ = ٣سم، أَ = ٧,٥سم أوجد و(∠أ)

(٢٣) أ ب جـ مثلث فيه و(∠أ) = ٦٠°، و(∠ب) = ٤٥°، فإذا كان أَ + بَ = ($\sqrt{٦}$ + ٢) سم فأوجد كل من أَ، بَ

(٢٤) أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة طول قطرها ٢٠سم، إذا كان و(∠أ) = ٤٢°، و(∠ب) = ٧٤ ٤٨′ °، أوجد أطوال أضلاع المثلث أ ب جـ

(٢٥) أ ب جـ مثلث فيه جـَ = ١٩سم، و(∠أ) = ١١٢°، و(∠ب) = ٣٣°، أوجد لأقرب رقمين عشريين كل من بَ، طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث.

(٢٦) إذا كانت مـ هي مساحة سطح المثلث أ ب جـ أثبت أن مـ = أَ^{٢} ($\frac{\text{حا ب حا جـ}}{٢ \text{ حا أ}}$)

الدرس ٢

قانون (قاعدة) جيب التمام
The cosine rule

سوف تتعلم
- قانون (قاعدة) جيب التمام لأي مثلث.
- استخدام قانون (قاعدة) جيب التمام في حل المثلث.
- نمذجة وحل مشكلات رياضية وحياتية باستخدام قاعدة جيب التمام.

المصطلحات الأساسية
- قاعدة جيب التمام cosine rule
- زاوية حادة acute angle
- زاوية منفرجة obtuse angle
- زاوية قائمة right angle

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية
Scientific calculator

فكر و ناقش

١- إذا طلب منك رسم مثلث أ ب حـ فيه أ = ٦ سم، ب = ٨ سم، و(∠ حـ) = ٩٠°
- هل المعلومات المعطاة كافية لرسم المثلث؟ فسر إجابتك.
- في حالة إمكانية رسم المثلث أوجد حـ، وقياس كل من ∠ أ ، ∠ ب

٢- مثلث أ ب حـ فيه و(∠ أ) = ٥٠° ، ب = ٨ سم ، حـ = ٦ سم.
- هل المعلومات المعطاة كافية لرسم المثلث؟

لماذا لا يمكن معرفة أطوال الأضلاع الباقية، وقياسات الزوايا المجهولة، كما ورد في البند (١).
- اكتب قاعدة الجيب لهذا المثلث، هل يمكنك الآن حل هذا المثلث؟

ما سبق يدعو إلى الحاجة إلى قانون (قاعدة) يمكن استخدامها إذا عرفنا من المثلث طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

ارشاد
يفضل عند كتابة القوانين الخاصة بجيب تمام الزاوية أن تؤخذ أضلاع المثلث أ ، ب ، حـ في ترتيب دوري واحد، حتى إذا عرفت إحدى الصور أمكن استنتاج الصور الأخرى.

تعلم

قانون (قاعدة) جيب التمام *The cosine rule*

ينص قانون (قاعدة) جيب التمام على أنه:
في أي مثلث أ ب حـ يكون:

$$أ^{٢} = ب^{٢} + حـ^{٢} - ٢ب حـ \text{ جتا } أ \quad \text{ومنه} \quad \text{جتا } أ = \frac{ب^{٢}+حـ^{٢}-أ^{٢}}{٢ب حـ}$$

$$ب^{٢} = حـ^{٢} + أ^{٢} - ٢ حـ أ \text{ جتا } ب \quad \text{ومنه} \quad \text{جتا } ب = \frac{حـ^{٢}+أ^{٢}-ب^{٢}}{٢حـ أ}$$

$$حـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} - ٢أ ب \text{ جتا } حـ \quad \text{ومنه} \quad \text{جتا } حـ = \frac{أ^{٢}+ب^{٢}-حـ^{٢}}{٢أ ب}$$

وليكن المطلوب **إثبات أن** $أ^{٢} = ب^{٢} + حـ^{٢} - ٢ب حـ \text{ جتا } أ$ ، $\text{جتا } أ = \frac{ب^{٢}+حـ^{٢}-أ^{٢}}{٢ب حـ}$

البرهان: (لا يمتحن فيه الطالب)

أ إذا كان المثلث أ ب حـ حاد الزوايا كما في شكل (١).
نرسم $\overline{حـ ء} \perp \overline{أ ب}$

∵ △ حـ ء ب قائم الزاوية في ء

∴ (ب حـ)^{٢} = (حـ ء)^{٢} + (ب ء)^{٢} نظرية فيثاغورث (١)

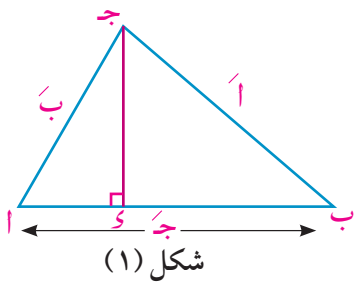
من الشكل ب ء = ب أ - أ ء (٢)

△ أ ء حـ قائم الزاوية في ء

∴ (حـ ء)^{٢} = (أ حـ)^{٢} - (أ ء)^{٢} (٣)

بالتعويض من ٣ في ١ ينتج أن:

(ب حـ)^{٢} = (أ حـ)^{٢} - (أ ء)^{٢} + (ب ء)^{٢} (٤)



شكل (١)

بالتعويض من ٢ في ٤ ينتج أن:

(ب حـ)^{٢} = (أ حـ)^{٢} - (أ ء)^{٢} + (ب أ - أ ء)^{٢}

= (أ حـ)^{٢} - (أ ء)^{٢} + (ب أ)^{٢} - ٢ (ب أ) (أ ء) + (أ ء)^{٢}

= (أ حـ)^{٢} + (ب أ)^{٢} - ٢ (ب أ) (أ ء)

= (أ حـ)^{٢} + (ب أ)^{٢} - ٢ (ب أ) (أ حـ حتا أ) (بالتعويض عن أ ء = أ حـ حتا أ)

∴ أَ^{٢} = بَ^{٢} + حـَ^{٢} - ٢بَ حـَ حتا أ

ومنه حتا أ = $\frac{ب^{٢}+حـ^{٢}-أ^{٢}}{٢ب حـ}$

فكر: هل يمكنك إثبات نفس القانون إذا كان المثلث أب جـ منفرج الزاوية؟ وضح ذلك

حاول أن تحل

(١) بطريقة مماثلة لما سبق استنتج بَ^{٢} ، حـَ^{٢} ، حتا ب ، حتا حـ.

(٢) هل القانون السابق صحيح في حالة المثلث القائم الزاوية؟ فسر إجابتك.

إيجاد طول الضلع الثالث من مثلث:

مثال

(١) مثلث أ ب حـ فيه أَ = ٤,٣٦ ، بَ = ٣,٨٤ ، ق (∠ حـ) = ١٠١° ، أوجد حـَ مقربًا لأقرب رقمين عشريين.

الحل

حـَ^{٢} = أَ^{٢} + بَ - ٢ أَ بَ حتا حـ

= (٤,٢٦)^{٢} + (٣,٨٤)^{٢} - ٢ (٤,٣٦) (٣,٨٤) حتا ١٠١° ≃ ٤٠,١٤

باستخدام الآلة الحاسبة

ابدأ ← 4.36 χ^2 + 3.84 χ^2 − 2 × 4.36 × 3.84 Cos 101 =

∴ حـَ ≃ ٦,٣٤

حاول أن تحل

(٣) أوجد طول الضلع الثالث من المثلث أ ب حـ الذي فيه بَ = ٢، حـَ = ٥ ، ق (∠ أ) = ٦٠° مقربًا لأقرب رقمين عشريين.

إيجاد قياس زاوية في المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة:

مثال

(٢) أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث أ ب حـ الذي فيه أَ = ٤,٦ ، بَ = ٣,٢ ، حـَ = ٢,٨

الحل

∵ أكبر زاوية فى القياس تقابل أكبر أضلاع المثلث طولًا ∴ ∠ أ أكبر زوايا المثلث قياسًا

$$\text{حتا أ} = \frac{\text{ب}^{2} + \text{حـ}^{2} - \text{أ}^{2}}{2\,\text{ب حـ}} = \frac{(3,2)^{2} + (2,8)^{2} - (4,6)^{2}}{2 \times 3,2 \times 2,8}$$

باستخدام الآلة الحاسبة

ابدأ ↓

3.2	χ^2	+	2.8	χ^2	−	4.6	χ^2	=	÷	(	2	×	3.2	)	=	Shift	Cos	=	,,,

وحيث إن جيب التمام سالب، فالزاوية أ منفرجة وليست أكبر من ١٨٠°

∴ ق (∠ أ) = ٩٩° ٥٣′ ٤٩″

حاول أن تحل

(٤) أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث أ ب حـ الذي فيه أَ = ١١سم ، بَ = ١٠سم ، حـَ = ٨سم [٧٤′ ٢٥°]

ملاحظة:

عند إيجاد قياس زاوية في مثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما بفضل استخدام قانون جيب التمام بدلًا من استخدام قانون الجيب وذلك لأنه:

١- في حالة استخدام قانون الجيب:

- فإن جيب الزاوية الحادة أو المنفرجة دائمًا موجب.

٢- في حالة استخدام قانون جيب التمام فإنه:

- إذا كانت الزاوية منفرجة يكون جيب تمامها سالبًا.
- و إذا كانت الزاوية حادة يكون جيب تمامها موجبًا.

استخدام قانون جيب التمام في حل المثلث:

يسمح لنا قانون جيب التمام بحل المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما .

حل المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما:

Solving the triangle given the lengths of two sids and the measure of the angle included

مثال

(٣) حل المثلث أ ب جـ الذي فيه أَ = ١١سم ، بَ = ٥سم ، ق (∠ حـ) = ٢٠°

الحل

يجب إيجاد حـَ ، ق (∠ أ) ، ق (∠ ب)

∵ حـَ^{2} = أَ^{2} + بَ^{2} - ٢ أَ بَ حتا حـ (قانون جيب التمام)

$= (١١)^{٢} + (٥)^{٢} - ٢ \times ١١ \times ٥ \text{ جتا } ٢٠^{\circ}$

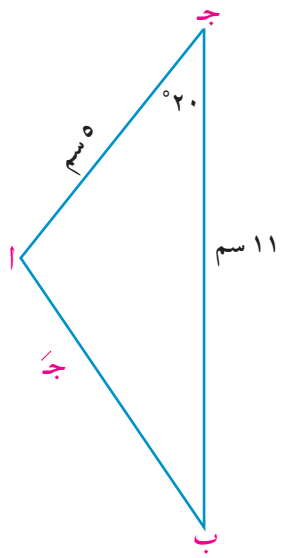
$حـ = \sqrt{(١١)^{٢} + (٥)^{٢} - ٢ \times ١١ \times ٥ \text{ جتا } ٢٠^{\circ}} \simeq ٦,٥٢٩$ سم

$\text{جتا } أ = \frac{ب^{٢} + حـ^{٢} - أ^{٢}}{٢ ب حـ} = \frac{(٥)^{٢} + (٦,٥٢٩)^{٢} - (١١)^{٢}}{(٥)(٦,٥٢٩)\ ٢} \simeq -٠,٨١٧$

$ق(\angle أ) = ١٤٤,٧٨٦^{\circ}$

$ق(\angle ب) = ١٨٠^{\circ} - [ق(\angle أ) + ق(\angle حـ)]$

$= ١٨٠^{\circ} - [١٤٤,٧٨٦^{\circ} + ٢٠^{\circ}] = ١٥,٢١٤^{\circ}$



حاول أن تحل

(٥) حل المثلث أ ب حـ الذي فيه أَ = ٢٤,٦سم ، حـَ = ١٤,٢سم ،
ق(∠ ب) = ٤٢ ١٨َ°

➢ يسمح أيضًا قانون جيب التمام بحل المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة، علمًا بأن مجموع طولي أي ضلعين منهما أكبر من طول الضلع الثالث .

ارشاد

يمكنك استخدام قانون الجيب أيضًا لحساب ق(∠ أ) ، ق(∠ ب) بعد إيجاد حـَ، ولكن الفائدة التي تعود من استخدام قانون جيب التمام هو التمييز بين الزوايا الحادة والمنفرجة.

حل المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة:

مثال

(٤) حل المثلث أ ب حـ الذي فيه أَ = ٩سم ، بَ = ٧سم ، حـَ = ٥سم.

الحل

المطلوب هو إيجاد قياسات الزوايا أ ، ب ، حـ

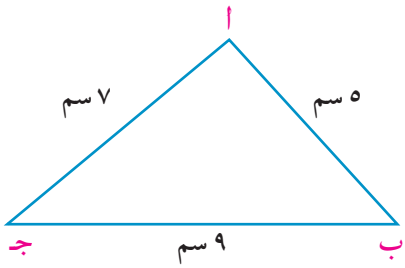
$\because \text{ جتا } أ = \frac{ب^{٢} + حـ^{٢} - أ^{٢}}{٢ ب حـ} = \frac{٧^{٢} + ٥^{٢} - ٩^{٢}}{٢ \times ٧ \times ٥} = -٠,١$

$ق(\angle أ) \simeq ٩٥ ٤٤َ ٢١°$

$\text{جتا } ب = \frac{حـ^{٢} + أ^{٢} - ب^{٢}}{٢ حـ أ} = \frac{٥^{٢} + ٩^{٢} - ٧^{٢}}{٢ \times ٥ \times ٩} \simeq ٠,٦٣٣$

$ق(\angle ب) \simeq ٥٠ ٤٢َ ١٣°$

$ق(\angle حـ) = ١٨٠^{\circ} - [ق(\angle أ) + ق(\angle ب)] = ٣٣ ٣٣َ ٢٦°$



حاول أن تحل

(٦) حل المثلث أ ب حـ الذي فيه أَ = ١٢,٢سم ، بَ = ١٨,٤سم ، حـَ = ٢١,١سم

يقدم قانون جيب التمام مدخلًا بديلًا إلى الحالة الغامضة والتي سبق دراستها في قانون الجيب، ولإيجاد طول الضلع الثالث باستخدام قانون جيب التمام نحصل على معادلة تربيعية (من الدرجة الثانية) وبحلها يكون عدد المثلثات هو عدد الحلول الموجبة الناتجة والمثال التالي يستخدم هذا المدخل.

تذكر أن

(حتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)

مثال

حل المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس زاوية:

(٥) حل المثلث أ ب حـ الذي فيه أ = ٦سم ، ب = ٧سم ، ق(∠ أ) = ٣٠°

الحل

المطلوب إيجاد حـ ، ق(∠ ب) ، ق(∠ حـ)

∵ أ^{٢} = ب^{٢} + حـ^{٢} - ٢ب حـ حتا أ (قانون جيب التمام)

٣٦ = ٤٩ + حـ^{٢} - ٢ × ٧ حـ حتا ٣٠°

٠ = حـ^{٢} - ٧$\sqrt{٣}$ حـ + ١٣ أي حـ^{٢} - ٧$\sqrt{٣}$ حـ + ١٣ = ٠

∴ حـ = $\frac{١}{٢}$ (٧$\sqrt{٣}$ ± $\sqrt{(-٧\sqrt{٣})^{٢} - ٤ \times ١ \times ١٣}$) (القانون العام لحل المعادلة التربيعية)

∴ حـ = ١٠,٩٣٥ أو ١,١٨٨

كل قيمة موجبة لـ حـ تقابل مثلثًا واحدًا، ولذلك لدينا مثلثان ولإيجاد حتا ب فإنه:

حتا ب = $\frac{\text{حـ}^{٢} + \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}}{٢\text{حـ أ}}$

عندما حـ$_{١}$ = ١٠,٩٣٥

حتا ب$_{١}$ = $\frac{(١٠,٩٣٥)^{٢} + (٦)^{٢} - (٧)^{٢}}{(٦)(١٠,٩٣٥) ٢}$

حتا ب$_{١}$ = ٠,٨١٢

ق(∠ ب$_{١}$) = ٣٥,٦٨٥°

≃ ٣٥°٤١′٦″

ق(∠ حـ$_{١}$) = ١٨٠° - [ق(∠ أ) + ق(∠ ب$_{١}$)]

≃ ١١٤,٣١٤°

≃ ١١٤°١٨′٥٠″

عندما حـ$_{٢}$ = ١,١٨٨

حتا ب$_{٢}$ = $\frac{(١,١٨٨)^{٢} + (٦)^{٢} - (٧)^{٢}}{(٦)(١,١٨٨) ٢}$

حتا ب$_{٢}$ = - ٠,٨١٢

ق(∠ ب$_{٢}$) = ١٤٤,٣١٤°

≃ ١٤٤°١٨′٥٠″

ق(∠ حـ$_{٢}$) = ١٨٠° - [ق(∠ أ) + ق(∠ ب$_{٢}$)]

≃ ٥,٦٨٥°

≃ ٥°٤١′٦″

تفسير: في أحد المثلثين حـ = ١٠,٩٤، ق(∠ ب) = ٣٥°٤١′٦″ ، ق(∠ حـ) = ١٤٤°١٨′٥٠″، وفي المثلث الآخر حـ = ١,١٩ ، ق(∠ ب) = ١٤٤°١٨′٥٠″ ، ق(∠ حـ) = ٥°٤١′٦″. قارن هذه النتائج مع النتائج التي حصلنا عليها في المثال رقم (٥) من الدرس (١-٢) الذي يحل المثلث نفسه بمعلومية قانون الجيب.

حاول أن تحل

(٧) حل المثلث أ ب حـ الذي فيه أ = ٨,٦سم ، ب = ١١,١سم ، ق(∠ أ) = ٦٣°

تطبيقات هندسية على قانون (قاعدة) جيب التمام

Geometric applications on the cosine rule

مثال

(٦) أ ب حـ مثلث فيه أ = ٦٣سم ، ب - حـ = ٢٧ سم، ومحيط المثلث يساوي ١٤٠ سم، أوجد كلًّا من ب ، حـ وقياس أصغر زوايا المثلث، ومساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل

∵ أَ + بَ + حَ = ١٤٠ (محيط المثلث) ، أَ = ٦٣

∴ بَ + حَ = ١٤٠ - ٦٣ أي بَ + حَ = ٧٧ (١)

∵ بَ - حَ = ٢٧ (معطى) (٢)

من (١) ، (٢) بالجمع ينتج أن:

٢ بَ = ١٠٤ أي أن بَ = ٥٢ سم

بالتعويض في ١ ينتج أن حَ = ٢٥سم

ونلاحظ أن حَ هو أصغر أضلاع المثلث أ ب حـ

∴ ∠ حـ هي أصغر زوايا المثلث أ ب حـ

∴ حتا حـ = $\frac{أَ^{٢} + بَ^{٢} - حَ^{٢}}{٢ أَ بَ}$ = $\frac{(٦٣)^{٢} + (٥٢)^{٢} - (٢٥)^{٢}}{٢ \times ٦٣ \times ٥٢}$ = ٠,٩٢٣٠٧٦٩

∴ ق (∠ حـ) = ٢٢°٣٧′

مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ أَبَ حا حـ

= $\frac{١}{٢} \times ٦٣ \times ٥٢ \times$ حا ٢٢°٣٧′ ≃ ٦٣٠سم^{٢}

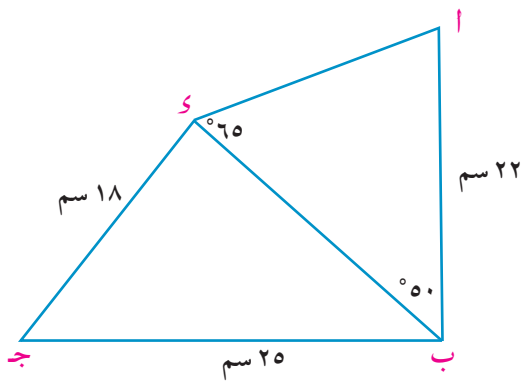
حاول أن تحل

(٨) △ أ ب حـ فيه بَ = ٤سم، أَ + حَ = ١١سم ، أَ - حَ = ١سم ،أثبت أن ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ ب)، ثم أوجد محيط المثلث أ ب حـ ومساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع.

مثال

(٧) أ ب حـ ء شكل رباعي فيه أ ب = ٢٢سم ، ق (∠ أ ء ب) = ٦٥° ، ق (∠ ء ب أ) = ٥٠° ، ب حـ = ٢٥سم، ء حـ = ١٨سم، أوجد: ق (∠ حـ ب ء) ، ق (∠ ب حـ ء)

الحل



في △ أ ب ء

ق (∠ أ) = ١٨٠° - (٥٠° + ٦٥°)

= ١٨٠° - ١١٥° = ٦٥°

∵ ق (∠ أ) = ق (∠ ء) = ٦٥°

∴ أ ب = ب ء = ٢٢سم

في △ ء ب حـ

حتا (∠ ء ب حـ) = $\frac{(ب ء)^{٢} + (ب حـ)^{٢} - (ء حـ)^{٢}}{٢ (ب ء) (ب حـ)}$

= $\frac{(٢٢)^{٢} + (٢٥)^{٢} - (١٨)^{٢}}{٢ \times ٢٢ \times ٢٥}$ ≃ ٠,٧١٣٧

∴ ق (∠ ء ب حـ) ≃ ٤٤°٢٨′٦

حتا(∠ ب حـ ء) = $\frac{(\text{ب حـ})^{٢} + (\text{حـ ء})^{٢} - (\text{ب ء})^{٢}}{٢ (\text{ب حـ}) (\text{حـ ء})}$ = $\frac{٢(٢٥) + ٢(١٨) - ٢(٢٢)}{١٨ \times ٢٥ \times ٢}$ ≃ ٠,٥١٦٧

∴ ق (∠ ب حـ ء) ≃ ٥٨°٥٣′٢٨

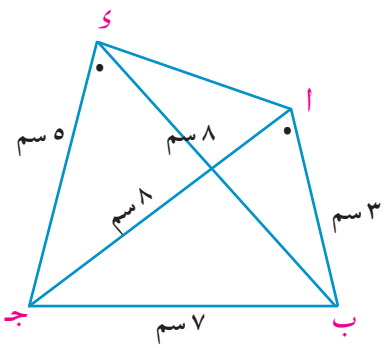
حاول أن تحل

(٩) أ ب حـ ء شكل رباعي فيه ق (∠ ء أ ب) = ق (∠ ء ب حـ) = ٩٠° ، ب ء = ١٠سم ، أ ء = ٨سم ، ق (∠ ء حـ ب) = ٣٠° ، أوجد أ حـ لأقرب سنتيمتر.

مثال

(٨) أ ب حـ ء شكل رباعي فيه أ ب = ٣سم ، أ حـ = ٨سم ، ب حـ = ٧سم ، حـ ء = ٥سم ، ب ء = ٨سم ، أثبت أن الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري.

الحل



في △ أ ب حـ

حتا أ = $\frac{\text{ب}^{٢} + \text{حـ}^{٢} - \text{أ}^{٢}}{٢ \text{ب حـ}}$ = $\frac{٢(٧) - ٢(٣) + ٢(٨)}{٣ \times ٨ \times ٢}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ ق (∠ أ) = ٦٠° (١)

في △ ب ء حـ

حتا ء = $\frac{(\text{حـ ء})^{٢} + (\text{ء ب})^{٢} - (\text{ب حـ})^{٢}}{٢ (\text{حـ ء}) (\text{ء ب})}$ = $\frac{٢(٧) - ٢(٨) + ٢(٥)}{٨ \times ٥ \times ٢}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ ق (∠ ء) = ٦٠° (٢)

∵ ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ ب ء حـ) وهما مرسومتان على $\overline{\text{ب جـ}}$ وفي جهة واحدة منها فيكون الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري. (وهو المطلوب).

حاول أن تحل

(١٠) أ ب حـ ء شكل رباعي فيه أ ب = ٩سم ، ب حـ = ٥سم ، حـ ء = ٨سم ، ء أ = ٩سم ، أ حـ = ١١سم. أثبت أن الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري.

تمـــارين الدرس الثاني

أكمل كلًّا مما يأتي:

(١) في أي مثلث ل م ن يكون: ل^{٢} = م^{٢} + ن^{٢} - ، حتا ل = $\frac{\text{م}^{٢} + \text{ن}^{٢} - \text{.....}}{\text{.....}}$

(٢) في المثلث أ ب جـ ، أطوال أضلاعه ١٣ ، ١٧ ، ١٥ من السنتيمترات فإن قياس أكبر زواياه يساوي °

(٣) مثلث س ص ع أطوال أضلاعه ٥,٧سم ، ٧,٤سم ، ٤,٣سم فإن قياس أصغر زواياه يساوي °

(٤) △ س ص ع فيه س = ١٠ سم ، ص = ٦سم ، ق (∠ ع) = ٦٠° فإن ع = ...

(٥) فى △ ل ك م يكون ك^{٢} + م^{٢} - ل^{٢} = ...

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٦) قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣، ٥، ٧ هى:

أ ١٥٠° ب ١٢٠° ج ٦٠° د ٣٠°

(٧) فى أى مثلث ل م ن يكون المقدار $\frac{ل^{٢} + م^{٢} - ن^{٢}}{٢ ل م}$ مساويًا:

أ حتا ل ب حتا م ج حتا ن د لاشئ مما سبق

(٨) في المثلث س ص ع يكون ص^{٢} + ع^{٢} - س^{٢} = ٢ ص ع ...

أ حتا س ب حا ع ج حتا ع د حا س

(٩) فى المثلث أ ب جـ ، أ : ب : جـ = ٣ : ٢ : ٢ فإن حتا أ تساوى

أ $\frac{١}{٨}$ ب $-\frac{١}{٨}$ ج $\frac{١}{٤}$ د $\frac{٣}{٤}$

أجب عن الاسئلة الآتيه:

(١٠) **فى المثلث أ ب جـ إذا كان:**

أ أ = ٥سم ، ب = ٧سم ، جـ = ٨سم فأثبت أن ق(∠ب) = ٦٠°

ب أ = ٣سم ، ب = ٥سم ، جـ = ٧سم فأثبت أن ق(∠جـ) = ١٢٠°

ج أ = ١٣سم ، ب = ٧سم ، جـ = ١٣سم فأوجد ق(∠جـ)

د أ = ١٣سم ، ب = ٨سم ، جـ = ٧سم فأوجد ق(∠أ)

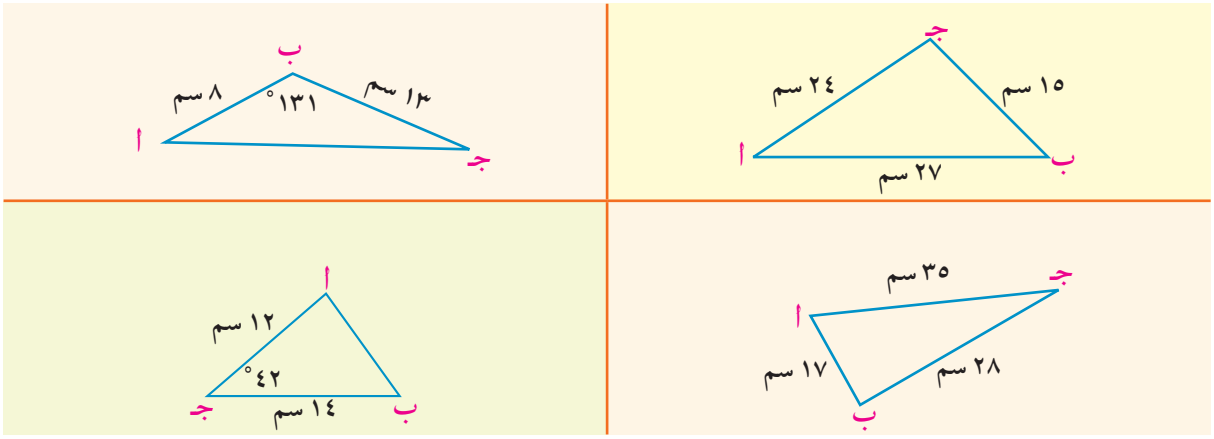
هـ أ = ١٠سم ، ب = ١٧سم ، جـ = ٢١سم فأوجد قياس أصغر زاوية فى المثلث

و أ = ٥سم ، ب = ٦سم ، جـ = ٧سم فأوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث

ز أ = ١٧سم ، ب = ١١سم ، ق(∠جـ) = ٤٢° فأوجد جـ مقربًا لأقرب رقمين عشريين

ح ب = ١٦ ، جـ = ١٤ ، ق(∠أ) = ٧٢° فأوجد أ مقربًا لأقرب رقمين عشريين

(١١) **في التمارين من (أ - د) حل المثلث:**



(١٢) في التمارين من (أ - هـ) هل يمكن تكوين مثلث أ ب جـ ؟ إذا كان ممكنًا حل هذا المثلث:

أ) و(∠أ) = ٥٥°، بَ = ١٢سم ، جَ = ٧سم

ب) أَ = ٣,٢سم ، بَ = ٧,٦٣سم ، جَ = ٦,٤سم

جـ) أَ = ١٢سم، بَ = ٢١سم ، و(∠جـ) = ٩٥°

د) أَ = ١سم، بَ = ٥سم، جَ = ٤سم

هـ) و(∠أ) = ٤٢°، أَ = ٧سم ، بَ = ١٠سم

تطبيقات هندسية:

(١٣) متوازى أضلاع طولا ضلعيه المتجاورين ١٨سم، ٢٦سم، وقياس الزاوية بينهما ٣٩°، أوجد طول أصغر قطر له مقربًا لأقرب رقمين عشريين.

(١٤) أ ب جـ ء شكل رباعى فيه أ ب = ٩سم، ب جـ = ٥سم، جـ ء = ٨سم ، أ ء = ٩سم ، أ جـ = ١١ سم، أثبت أن الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى.

(١٥) أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه أ ب = ٩سم ، ب جـ = ١٣سم ، أ جـ = ٢٠ سم، أوجد طول $\overline{ب ء}$

(١٦) أ ب جـ مثلث محيطه ٧٠سم ، أَ = ٢٦سم ، و(∠أ) = ٦٠° ، أوجد مساحة سطحه.

(١٧) **البرهنة النظرية :** أ ب جـ مثلث فيه ء منتصف $\overline{ب جـ}$، أثبت أن :

$(أب)^{٢} + (أجـ)^{٢} = ٢(أء)^{٢} + ٢(ب ء)^{٢}$ ، وإذا كان :

أ ب = ٥سم ، أجـ = ٨سم ، ب جـ = ١٢ سم أوجد أ ء .

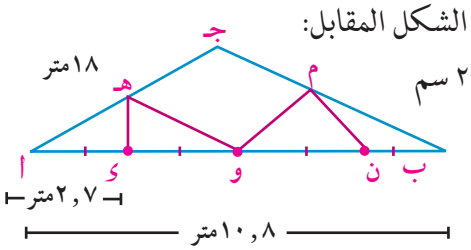
(١٨) **البرهنة النظرية (للمتفوقين):** في المثلث أ ب جـ إذا كان : $(أَ + بَ + جَ)(أَ + بَ - جَ) = ك \cdot أَ بَ$

فاثبت أن: ك ∈]٠ ، ٤[، ثم أوجد و(∠جـ) عندما ك = ١

تطبيقات حياتية:

(١٩) **الهندسة الإنشائية:** صمم مهندس معمارى سقف مصنع كما فى الشكل المقابل:

أجـ = ب جـ ، أ ء = ء و = و م = م ب = ٢,٧ سم

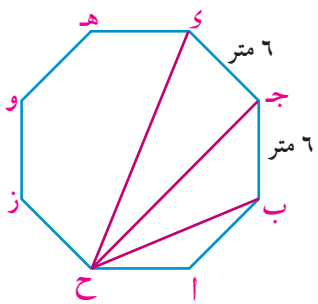


أ) أوجد و(∠جـ أ و)

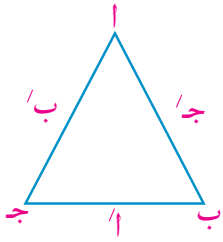
ب) إذا كان أ هـ = ٣,٦ أمتار ، أوجد طول $\overline{ء هـ}$.

جـ) أوجد طول $\overline{و هـ}$.

(٢٠) **التصميم المعمارى:** صمم مهندس معمارى مبنى على شكل مثمن منتظم، طول كل ضلع من أضلاعه ٦ أمتار، أوجد أطوال الأقطار $\overline{ع ب}$ ، $\overline{ع جـ}$ ، $\overline{ع ء}$.



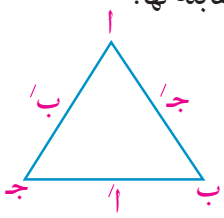
ملخص الوحدة



١ **للمثلث ستة عناصر:** هى ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا .

➢ حل المثلث يعنى إيجاد عناصره المجهولة بدلالة عناصره المعلومة وقد استخدمنا فى هذه الوحدة قانون الجيب وجيب التمام مع الآلة الحاسبة العلمية لحل المثلث .

٢ **قانون (قاعدة) الجيب:** فى أى مثلث، تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها.



أى إنه فى أى مثلث أ ب جـ يكون:

➢ $\frac{أ}{حا أ} = \frac{ب}{حا ب} = \frac{جـ}{حا جـ}$

وقد أمكن استخدام هذا القانون (القاعدة) فى حل المثلث فى الحالات التالية:

➢ إذا علم طول أحد أضلاعه وقياسا زاويتين.

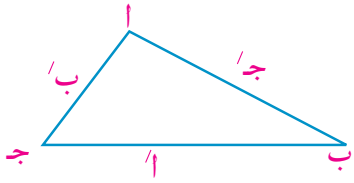
➢ إذا علم طولا ضلعين فيه وقياس زاوية ليست محصورة بينهما

تمرين مشهور:

(٢١) فى أى مثلث أ ب جـ يكون $\frac{أ}{حا أ} = \frac{ب}{حا ب} = \frac{جـ}{حا جـ} = ٢ هـ$

حيث هـ طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ

(٢٢) مساحة سطح أى مثلث = **حاصل ضرب طولى أى ضلعين متجاورين × جيب الزاوية المحصورة بينهما**



مساحة سطح المثلث أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أ ب حا جـ

= $\frac{1}{2}$ جـ أ حا ب

= $\frac{1}{2}$ ب جـ حا أ

(٢٣) **قانون (قاعدة) جيب التمام:** ينص قانون (قاعدة) جيب التمام على أنه:

فى أى مثلث أب جـ يكون

$أ^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢} - ٢ ب جـ \text{ جتا } أ$ ومنه جتا أ $= \frac{ب^{٢}+جـ^{٢}-أ^{٢}}{٢ ب جـ}$

$ب^{٢} = جـ^{٢} + أ^{٢} - ٢ ب أ \text{ جتا } ب$ ومنه جتا ب $= \frac{جـ^{٢}+أ^{٢}-ب^{٢}}{٢ جـ أ}$

$جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} - ٢ أ ب \text{ جتا } جـ$ ومنه جتا جـ $= \frac{أ^{٢}+ب^{٢}-جـ^{٢}}{٢ أ ب}$

(٢٤) **استخدام قانون جيب التمام فى حل المثلثات:** يمكن استخدام قاعدة جيب التمام فى حل المثلث إذا علم:

➢ طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما .

➢ أطوال أضلاعه الثلاثة.

➢ طولا ضلعين وقياس زاوية (حيث يقدم قانون جيب التمام مدخلًا بديلاً للحالة الغامضة، والتى سبق دراستها فى قانون الجيب ، حيث إنه لإيجاد طول الضلع الثالث باستخدام قانون جيب التمام ، نحصل على معادلة تربيعية وبحلها يكون عدد المثلثات هو عدد الحلول الموجبة الناتجة .

تمـــاريـن عامة

أكمل كل ممايأتى:

(١) فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاعه مع

(٢) يمكن استخدام قاعدة جيب التمام فى إيجاد قياسات زوايا المثلث إذا علمت أو

(٣) أكبر ضلع طولين فى المثلث يقابل

(٤) يمكن استخدام قانون الجيب فى إيجاد طول أى ضلع فى المثلث إذا علم

(٥) حل المثلث يعنى إيجاد و بشرط أن يكون معلوم منها عناصر أحدها على الأقل

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

(٦) فى المثلث س ص ع إذا كان سَ = ١٥سم ، صَ = ٢٥ سم ، عَ = ٣٥ سم فإن قياس أكبر زاوية فى المثلث تساوى

أ ١٥٠° ب ١٢٠° ج ٤٠° د ٩٠°

(٧) في المثلث أب جـ إذا كان أَ = ٤سم ، بَ = ٧سم ، ق(∠جـ) = ١٢٠° ، فإن مساحة المثلث أ ب جـ تساوى:

أ ١٤ سم^{٢} ب ٧ $\sqrt{٣}$ سم^{٢} ج ٢٨سم^{٢} د ٧ $\sqrt{٢}$ سم^{٢}

(٨) س ص ع مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠ $\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث يساوى:

أ ٥سم ب ١٠ سم ج ١٥سم د ٢٠ سم

(٩) إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث س ص ع يساوى ٥سم ، ق(∠أ) = ٣٠° فإن أَ يساوى:

أ ٥سم ب ١٠ سم ج ١٥سم د ٢٠ سم

(١٠) س ص ع مثلث فيه ص=١٢,٦سم، (س) = ٧١° ٤٨´ ، ق(∠ع) = ٤٨° ١٢´ أوجد أَ ، جَ

(١١) أ ب جـ مثلث فيه جَ = ١٦,٢سم ، ق(∠أ) = ٣٣° ١٨´ ، ق(∠ب) = ٤٣° ١٢´ ، أوجد قيمة كل من أَ ، بَ وطول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب جـ .

(١٢) أوجد محيط المثلث أ ب جـ ، الذى فيه حَ = ٨,٧سم ، ق(∠أ) = ٥٧° ١٣´ ، ق(∠ب) = ٦٤° ١٨´

(١٣) أوجد مساحة سطح الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ والذى فيه أَ = ٦سم ، ق(∠أ) = ٦٠° مقربًا الناتج لأقرب عدد صحيح.

(١٤) أ ب جـ مثلث فيه أ جـ = ٤,٧ سم ، ق(∠ب) = ٣٤° ، ق(∠جـ) = ٦٦° ، أوجد طول $\overline{ب جـ}$ ، ثم أوجد محيط الدائرة التى تمر برؤوس المثلث أ ب جـ.

(١٥) إذا كان محيط المثلث أ ب جـ = ٤٠سم ، ق(∠أ) = ٤٤° ، ق(∠ب) = ٦٦° ، فأوجد أطوال أضلاع المثلث أ ب جـ .

(١٦) أ ب جـ مثلث مساحة سطحه ٤٥٠سم^{٢} ، ق(∠ب) = ٨٢° ، ق(∠جـ) = ٥٦° فما قيمة أَ ؟

(١٧) البرهنة النظرية : فى أى مثلث أ ب جـ، أثبت أن مساحته تساوى $\frac{أ ب جـ}{٤ ن}$ حيث ن ق طول نصف قطر

الدائرة المارة برؤوسه.

(١٨) أوجد قياس أكبر زوايا المثلث أ ب جـ إذا كان أَ = ٦سم ، بَ = ١٠ سم ، جـَ = ١٤سم

(١٩) أوجد قياس أصغر زوايا المثلث أ ب جـ ، إذا كان أَ = ٧سم ، بَ = ٥ سم ، جـَ = ١٠سم

(٢٠) أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ، الذى فيه أَ = ٧,٦سم، بَ = ٥,٨ سم، جـَ = ٣,٤سم

(٢١) في المثلث أ ب جـ، أَ = ١٢ سم، بَ = ١٣سم، جـَ = ١٠سم، أوجد ق(∠أ) لأقرب دقيقة ، ثم أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

(٢٢) أ ب جـ مثلث فيه أَ = ١٣ سم، بَ = ١٤سم، جـَ = ١٥سم ، أوجد ق(∠ ب)، ثم أوجد مساحة سطح المثلث أ ب جـ لأقرب سنتيمتر مربع.

(٢٣) أ ب جـ مثلث فيه ق(∠ جـ) = ٩٦° ٢٣′ ، أَ = ٧سم ،بَ = ٩سم أوجد :

أ جـَ

ب مساحة سطح المثلث أ ب جـ لأقرب سم^{٢}

جـ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ لأقرب سنتيمتر.

(٢٤) أ ب جـ مثلث محيطه ٥٢سم، أَ = ١٣سم، بَ = ١٧سم، أوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث، ثم احسب مساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع.

(٢٥) حل △ أ ب جـ إذا كان:

أ أَ = ١٢سم ، ق(∠ب) = ٥٩° ، ق(∠جـ) = ٧٣°

ب ق(∠أ) = ٧٥° ٣٥′ ، أَ = ٧ سم ، بَ = ٥,٦سم

جـ ق(∠أ) = ٧٣° ١٠′ ، أَ = ١٣٥° ، جـَ = ١٧١سم

د ق(∠ب) = ٣٦° ، بَ = ٥,٣٧سم ، جـَ = ٤سم

هـ ق(∠أ) = ١٥٣° ١٢′ ، بَ = جـَ = ٦ سم

و أَ = ٥سم ، بَ = ٨سم ، جـَ = ٧سم

ز ق(∠أ) = ٦٠° ، بَ = ٨سم ، جـَ = ١٥سم

ح أَ = ١٤سم ، ق(∠ب) = ٥٣° ، جـَ = ١٢سم

ط أَ = ١١سم ، بَ = ٩سم ، ق(∠جـ) = ٤٣° ١٢′

البرهنة النظرية

(٢٦) فى أى مثلث أ ب جـ أثبت أن:

أَ^{٢} = بَ^{٢} + جـَ^{٢} - ٢بَ جـَ حتا أ وإذا كان أَ = ٤سم ، بَ = ٥سم ، جـَ = ٦سم، أثبت أن حتا جـ = حتا٢ أ

ثم أثبت أن مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{\sqrt{١٥ \times ٧}}{٤}$ سم^{٢}

تطبيقات هندسية:

(٢٧) أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه أ ب = ١٨ سم، ق(∠ جـ أ ب) = ٣٦°، ق(∠ ء ب أ) = ٤٤°، أوجد طول القطر $\overline{أجـ}$ لأقرب سنتيمتر.

(٢٨) أ ب جـ ء شكل رباعى فيه جـ ء = ١٠٠سم، ق(∠ ب جـ أ) = ٣٦°، ق(∠ ب ء أ) = ٥٥°، ق(∠ ب جـ ء) = ٨٥°، ق(∠ جـ ء أ) = ٨٧°، أوجد طولى $\overline{ب ء}$ ، $\overline{أجـ}$ لأقرب سنتيمتر.

(٢٩) أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{أء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، أ جـ = ١٥سم ، ق(∠ ء) = ١١٨° ، ق(∠ ب) = ٦٤°، ق(∠ جـ أ ء) = ٢٤° أوجد لأقرب عددين عشريين.

أ طول كلًا من $\overline{أء}$ ، $\overline{ب جـ}$.

ب مساحة سطح شبه المنحرف أ ب جـ ء .

(٣٠) أ ب جـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م ، أ جـ = ١٦سم، ب ء = ٢٠سم ، ق(∠ أ م ب) = ٥٤°، أوجد طول $\overline{أء}$ لأقرب سنتيمتر.

(٣١) أ ب جـ ء شكل رباعى فيه أ ب = أ ء = ٩سم ، ب جـ = ٥سم ، جـ ء = ٨ سم ، أ جـ = ١١سم ، أثبت أن الشكل أ ب جـ ء شكل رباعى دائرى.

(٣٢) **البرهنة النظرية :** فى أ ب جـ أثبت أن $\frac{أ}{حا أ} = \frac{ب}{حا ب} = \frac{جـ}{حا جـ}$ ،ثم أثبت أن مساحة سطح المثلث يتعين بالقانون:

مـ(△ أ ب جـ) = $\frac{أ^{٢} حا ب حا جـ}{٢ حا أ}$ ، ثم احسب مساحة سطح المثلث أ ب جـ إذا علمت أن:

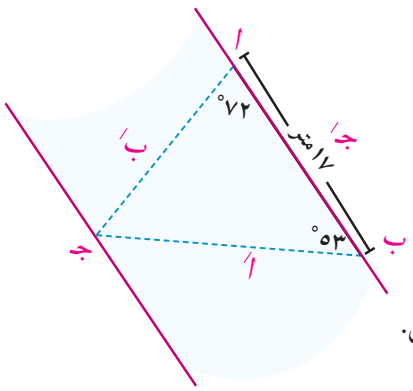
أ = $٢\sqrt{٣}$ سم ،ق(∠ ب) = ٣٠°، ق(∠ جـ) = ١٣٥°

(٣٣) **البرهنة النظرية (للمتفوقين):** في المثلث أ ب جـ أثبت أن $\frac{١}{حـ حا أ} + \frac{١}{أ حا ب} + \frac{١}{ب حا جـ} = \frac{ح}{△}$ ، حيث ح نصف محيط المثلث أ ب جـ، △ مساحة سطحه.

(٣٤) أ ب جـ ء هـ مخمس منتظم طول ضلعه ١٨,٢٦سم ، أوجد طول قطره $\overline{أجـ}$.

تطبيقات حياتية:

(٣٥) العلامتان أ ، ب تقعان على الحافة نفسها لجدول مياه والمسافة بينهما ١٧ متر، تقع العلامة جـ على الحافة المقابلة بحيث ق(∠ ب أ جـ) = ٧٢° ،ق(∠ أ ب جـ) = ٥٣° أوجد :



أ المسافة بين العلامتين أ ، جـ لأقرب متر.

ب المسافة بين حافتى الجدول بفرض أنهما متوازيتان لأقرب رقمين عشريين.

(٣٦) **معارض الفنون :** علقت صورة فى معرض بواسطة خيط مربوطة بحلقتين على الحافة الأفقية العليا من الصورة ويمر على مسمار فى حائط ، فإذا كان طول الخيط على كل جهة من المسمار ٣٠سم ، وقياس الزاوية بين جزئى الخيط ٥٠° فأوجد المسافة بين الحلقتين على حافة الصورة لأقرب سنتيمتر .

اختبار تراكمى

أسئلة الاختيار من متعدد

(١) بدون استخدام الآلة الحاسبة تكون قيمة حتا ١٢٠°

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

إرشادات للاختبار: السؤال (١) استخدم خواص الدوال المثلثية حتا (١٨٠ - حـ) = - حتا حـ

(٢) العلاقة التى تربط بين ظا هـ، قا هـ تعطى على الصورة:

أ) ظا^{٢} هـ - ١ = قا^{٢} هـ ب) قا^{٢} هـ - ١ = ظا^{٢} هـ ج) ظا^{٢} هـ - قا^{٢} هـ = ١ د) ظا^{٢} هـ + ١ = قا^{٢} هـ

(٣) نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ ، الذى فيه ق(∠أ) = ٦٠° ، أ = ٢$\sqrt{٣}$ سم يكون طوله:

أ) ٢سم ب) $\sqrt{٣}$ سم ج) ٢$\sqrt{٣}$ سم د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ سم

(٤) فى أى مثلث ل م ن يكون المقدار $\frac{م^{٢}+ن^{٢}-ل^{٢}}{٢ م ن}$ مساويًا:

أ) حتا م ب) حا ن ج) حتا ل د) حا م

أسئلة ذات إجابات قصيرة:

(٥) أجب عن كل مماياتى :

إذا كان حا أ = $\frac{٥}{١٣}$ حيث $\frac{ط}{٢}$ < أ < ط ، ظا ب = $\frac{٣}{٤}$ حيث π < ب < $\frac{\pi ٣}{٢}$ أوجد قيمة حا أ حتا ب + حتا أ حا ب.

إرشادات للاختبار : السؤال (٥) أوجد النسب المثلثية لكل من الزاويتين أ ، ب ، واضعًا فى الاعتبار الربع الذى تقع فيه كل زاوية ثم عوض فى المقدار المعطى .

(٦) فى المثلث س ص ع إذا كان سَ = ١٠سم ، ق(∠س) = ٣٠° ، ق(∠ص) = ٤٥° ، فأوجد صَ مقربًا لرقم عشرى واحد.

(٧) أ ب جـ مثلث فيه أَ = ٤سم، بَ = ٥سم ، جَ = ٦سم ، أوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث ، ثم أوجد مساحته.

أسئلة ذات إجابات طويلة:

(٨) س ص ع مثلث فيه ق(∠س) = $\frac{٢}{٣}$ ق(∠ص) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ع) ، طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه ١٠سم أوجد مساحة المثلث س ص ع .

(٩) أ ب جـ مثلث فيه أَ = ١٣سم ، بَ = ١٤سم ، جَ = ١٥سم ، أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

(١٠) حل المثلث ل م ن الذى فيه مَ = ١٧سم ، ق(∠ل) = ١٦° ٣٣° ، ق(∠ن) = ١٩° ٤٤°

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية :

إذا لم تستطع حل السؤال رقم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
ارجع إلى	مهارات سابقة	مهارات سابقة	الدرس ٤-١	الدرس ٤-٢	مهارات سابقة	الدرس ٤-١	الدرس ٤-٢	الدرس ٤-١	الدرس ٤-٢	الدرس ٤-١

اختبارات عامة

اولًا : اختبارات الجبر

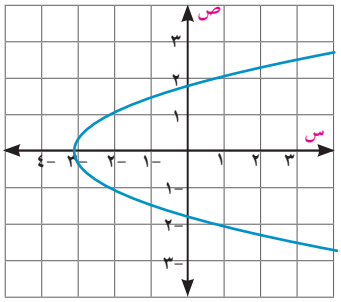
الاختبار الأول — الجبر

اجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أكمل مايأتى:

١ إذا كان د(س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ فإن مجال د(س) = ...

٢ الشكل المقابل متماثل حول محور



٣ منحنى الدالة ر (س) = |س - ٢| - ٣ هو إزاحة أفقية للمنحنى د(س) = |س| بمقدار
و إزاحة رأسية بمقدار

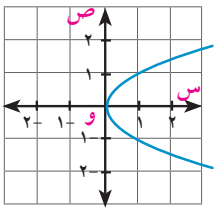
٤ الدالة د حيث د(س) = $أ^{س}$ ، أ > ١ تزايدية فى

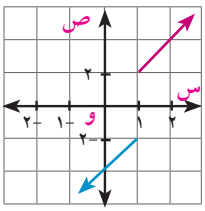
السؤال الثانى: **اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه.**

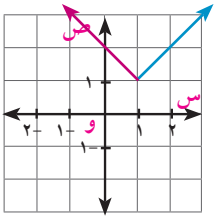
١ إذا كان $٥^{س} = ٢$ فإن $٢٥^{س}$ =

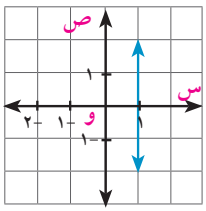
أ ١٠ ب ٥ ج ٦ د ٤

٢ الشكل الذى يمثل دالة من بين الأشكال الآتية هو:

أ


ب


ج


د


٣ إذا كان د(س) = $\frac{س - ٣}{س^{٢} - ٩}$ فإن د(-٣) =

أ غير معرف ب $\frac{١}{٦}$ ج صفر د $\frac{١}{٣}$

٤ الدالة الإحادية من بين الدوال الآتية هى:

أ $د_{١}(س) = س + ٢$ ب $د_{٢}(س) = س^{٢}$ ج $د_{٣}(س) = |س|$ د $د_{٤}(س) = ٥$

السؤال الثالث:

(١) عين مجال كل من الدوال الآتية:

(أ) $د(س) = \frac{س}{\sqrt{١ - س}}$ (ب) $ر(س) = \frac{س - ١}{س^{٢} - ١} + \frac{١}{س + ١}$

(٢) إذا كانت د: دالة حيث $د(س) = \begin{cases} س^{٢} & س < ٠ \\ -٢س & س > ٠ \end{cases}$ فارسم الشكل البيانى للدالة ومن الرسم أوجد مدى هذه الدالة.

السؤال الرابع:

(١) إذا كان $د_{١}$: ع ⟵ ع حيث $د_{١}(س) = ٣س - ١$، $د_{٢}$: [-٢، ٣] ⟵ ع حيث $د_{٢}(س) = ٣ - ٢س$ فارسم الدالة $(د_{١} + د_{٢})$ (س) محددًا مجالها.

(٢) أوجد الدالة العكسية للدالة ص = س + ١ ومثلهما فى شكل واحد.

السؤال الخامس: أوجد فى ح مجموعة حل كلا من المعادلات الآتية:

(١) لو$_{٤}$ (س - ٣) = ١ - لو$_{٤}$ (س - ٣). (٢) |س + ٢| = |س - ٣|.

استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} فى رسم كلًا من:

(أ) $د_{١}(س) = س^{٢} - ٣$ (ب) $د_{٢}(س) = س^{٢} + ٣$

الاختبار الثانى — الجبر

اجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أكمل مايأتى:

(١) إذا كانت الدالة د : دالة زوجية فى [أ، ب] فإن ب = ...

(٢) إذا كانت |س| = ٣ فإن س = ...

(٣) الدالة ص = لو$_{أ}$ س تكون متزايده لكل ومتناقصة لكل

(٤) مجموع الجذور الحقيقيه للمعادلة (س - ١)^{٦} = ٦٤ يساوى

السؤال الثانى: اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه.

(١) إذا كانت $٣س^{-٢} = ٢س^{-٢}$ فإن س =

(أ) ٣ (ب) -٢ (ج) صفر (د) ٢

اختبارات عامة

(٢) إذا كانت ص = $\sqrt[٣]{\text{س}}$ فإن الدالة العكسية لها ص =

أ ص = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} ب ص = س^{٣} ج ص = س^{٣} - ١ د ص = س^{٣}

(٣) إذا كانت (د) دالة فردية على [-س، س] فإن د(-٥) + د(٥) =

أ ١٠ ب ٥ ج -٥ د صفر

السؤال الثالث:

(١) إذا كان د(س) = ا$^{\text{س}}$ فإثبت أن المقدار $\frac{١}{\text{د(س)} + ١} + \frac{١}{\text{د(-س)} + ١}$ له قيمة ثابتة مهما كانت قيمة س.

(٢) أوجد مجال الدالة د حيث د(س) = لو$_{\text{س}-١}$ س

السؤال الرابع:

(١) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل كل مما يأتي:

أ د$_{١}$(س) = |س| + ١ ب د$_{٢}$(س) = ٢ - |س|

(٢) أوجد الدالة العكسية لكل من الدوال الآتية:

أ ص = ١ - س ب ص = $\frac{\text{س}}{\text{س} - ١}$

السؤال الخامس:

(١) ابحث نوع كلًا من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

أ د$_{١}$(س) = س حتا س ب د$_{٢}$(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} & \text{س} \leqslant ٠ \\ |\text{س}| & \text{س} > ٠ \end{cases}$

ج د$_{٣}$(س) = س^{٢}|س| - ١

(٢) أوجد مجموعة المعادلة لو$_{\text{س}}$ ٨١ = لو$_{\text{س}}$ ٣.

الاختبار الثالث — الجبر

اجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أكمل مايأتى:

(١) اكتب الدالة التى يمثلها المستقيم الذى ميله يساوى -١ ومقطعة الصادى يساوى ٣ هو

(٢) إذا كانت س^{٤} = ٨١ فإن س = ...

(٣) إذا كان لو$_{س}$ ٣٤٣ = ٣ فإن س = ...

(٤) ابسط صورة للمقدار $\frac{\text{لو}_{٧}\sqrt{\text{س}^{٣}} \times \text{لو ص}^{٢}}{\text{لو ص}^{٣} \times \text{لو س}^{٢}}$ = ...

السؤال الثانى: اختر الإجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة.

(١) الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} ٢ & \text{عندما س} < ٠ \\ -٢ & \text{عندما س} > ٠ \end{cases}$ متماثلة بالنسبة للنقطة:

أ (٢، ٠)　　ب (-٢، ٠)　　جـ (٠، ٠)　　د (٢، -٢)

(٢) الدالة الأسية د حيث د(س) = أ^{س} ، (أ < ١) تكون د(س) > ١ عندما

أ س ∈ ع　　ب س ∈ ع$^{+}$　　جـ س ∈ ع$^{-}$　　د س ∈ صـ

(٣) الدالة العكسية للدالة د(س) = ٤س هى د(س) تساوى

أ $\frac{١}{٤}$ س　　ب $\frac{١}{٤ س}$　　جـ ٤س　　د $\frac{٤}{س}$

(٤) إذا كان لو$_{س}$ ٤ = ٢ فإن س تساوى

أ {٤}　　ب {٢}　　جـ {٢، -٢}　　د {-٢}

السؤال الثالث:

(١) ارسم منحنى الدالة د: ع ⟵ ع$^{+}$ حيث د(س) = ٢^{س} متخذًا س = [-٣، ٤] ومن الرسم أوجد قيمة تقريبية لكل من د(-١,٥) ، $\sqrt{٢}^{٤}$

(٢) أوجد مجموعة حل المعادلة |٢س - ٣| = ١١

السؤال الرابع:

(١) اختصر لابسط صورة: لو$_{س ص}$ س + لو$_{س ص}$ ص.

(٢) إذا كانت د(س) = ٢^{س} أوجد قيمة س التى تحقق المعادلة د(س + ١) - د(س - ١) = ٢٤.

السؤال الخامس:

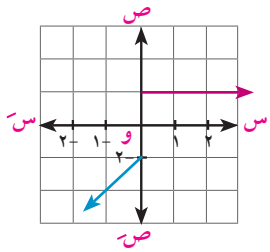
(١) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة لو ٢٥ + $\frac{\text{لو}_{٨} \times \text{لو}_{١٦}}{\text{لو}_{٦٤}}$

(٢) ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث د(س) = (س - ٢)|س| ومن الرسم أوجد مدى الدالة.

الاختبار الرابع — الجبر

اجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أكمل مايأتى:



(١) مدى الدالة فى الشكل المقابل يساوى

(٢) احداثى نقطة تقاطع الدالة الأسية د(س) = $أ^{س}$ + ١ مع محور الصادات هى النقطة (..... ،)

(٣) إذا كانت $لو_{٣}$ ($لو_{٢}$ س) = ١ فإن قيمة س = ...

(٤) أبسط صورة للمقدار $\frac{١}{لو_{٢}\ ١٢} + \frac{١}{لو_{٨}\ ١٢} + \frac{١}{لو_{٩}\ ١٢}$ = ...

السؤال الثانى: اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه.

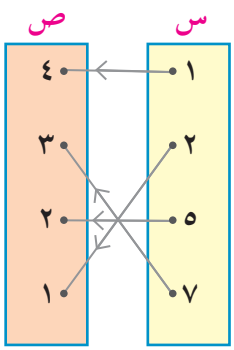
(١) مجال الدالة د(س) = $لو_{س-١}$ س هو:

أ) س < ٠ ب) س > ١ ج) ٠ < س < ١ د) ٠ ⩽ س ⩽ ١

(٢) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ فإن إحداثى نقطة التماثل للدالة د(س + ١) هى:

أ) (٠ ، ١) ب) (١ ، ٠) ج) (-١ ، ٠) د) (-١ ، ١)

(٣) الشكل المقابل يمثل دالة د: سـ ⟵ صـ فإن $د^{-١}$(٤) =



أ) ١ ب) ٢

ج) ٥ د) ٧

(٤) منحنى الدالة $د^{-١}$(س) هو صورة منحنى الدالة د(س) بالإنعكاس فى المستقيم:

أ) س = ٠ ب) ص = ٠

ج) ص = س د) ص = س

السؤال الثالث:

(١) إذا كانت د(س) = ٢^س فإوجد مجموعة حل المعادلة: د(س + ١) + د(س) - د(س - ١) = ٤٠

(٢) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^٣ لتمثيل كل من:

أ) د١(س) = (س + ١)^٣ ب) د٢(س) = س^٣ + ١

السؤال الرابع:

(١) إذا كان منحنى الدالة د حيث د(س) = لو س يمر بالنقطة (٤، ٢) فإوجد قيمة أ
ثم ارسم منحنى الدالة د فى [-٣، ٣].

(٢) أوجد مجموعة حل المعادلة : س^(٤/٣) - ١٠س^(٢/٣) + ٩ = صفر

السؤال الخامس:

(١) أوجد مجموعة حل المتباينة |٣س - ٢| ≤ ٧.

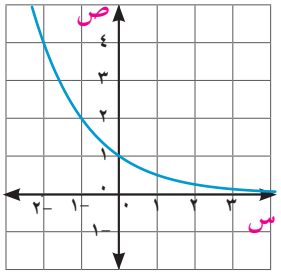
(٢) باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة س التى تحقق المعادلة الآتية: ٥س^(+١) + ٥س = ٤٢.

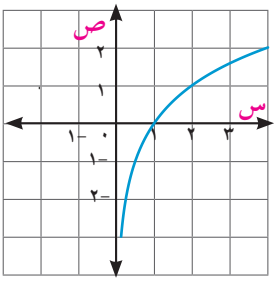
الاختبار الخامس — الجبر

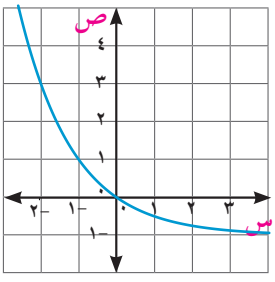
اجب عن الأسئلة الآتية:

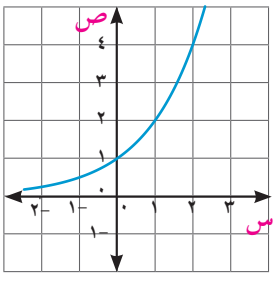
السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة.

(١) الدالة د حيث د(س) = ٢^س يمثلها الشكل البيانى:

أ)


ب)


ج)


د)


(٢) المقدار $\frac{٣ \text{ لو}_{٢}}{\text{لو}_{٤} + \text{لو}_{٣}}$ يكافى المقدار:

أ) لو$_{٣}$ ٢ ب) لو$_{٧}$ ٢ ج) لو$_{١٢}$ ٨ د) لو$_{٧}$ ٨

(٣) إذا كانت $٤^{س+٣} = ٧^{س+٣}$ فإن قيمة س تساوى:

أ) -٣ ب) ٤ ج) ٧ د) ٣

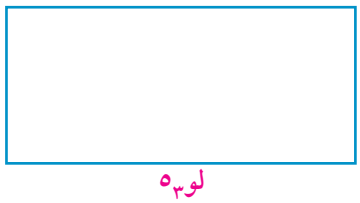
(٤) مجال الدالة د حيث د(س) = $\frac{٩}{\sqrt{٨^{س} - ١}}$ هو:

أ) $ع^{+}$ ب) $ع^{-}$ ج) $]١ ، \infty[$ د) $]٠ ، \infty[- \{١\}$

السؤال الثانى: أكمل مايأتى:

(١) مساحة المستطيل فى أبسط صورة فى الشكل المقابل:

= وحدة مربعة.



(٢) لو(ظاس) + لو(ظتاس) = ... حيث س = $]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

(٣) مجموع جذور المعادلة $س^{٤} = ٨١$ يساوى:

(٤) إذا كانت النقطة (٢، ٤) ∋ لدالة زوجية فإن د(-٢) = ...

السؤال الثالث:

(١) إذا كان د(س) = $س^{٢} - ١$ ، ر(س) = س + ١ فارسم الدالة $\frac{د}{ر}$(س) مبينًا مجال ومدى الدالة.

(٢) أوجد مجموعة حل المعادلتين: $٣^{س} \times ٥^{ص} = ٧٥$ ، $٣^{ص} \times ٥^{س} = ٤٥$

السؤال الرابع:

(١) ارسم الدالة د حيث د(س) = $٢^{|س|}$ مبينًا مدى الدالة ونوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

(٢) أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية: $(لو_{٢} س)^{٢} = لو_{٢} ٤س$

السؤال الخامس:

(١) أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية: |س + ٣| + ٢س = ٠

(٢) باستخدام الحاسبة حل المعادلة: $٥^{٢س+٣} = ٣^{س+٥}$.

ثانيًا : اختبارات التفاضل وحساب المثلثات

الاختبار الأول

اجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أكمل مايأتى:

(١) $\lim_{س \to 0}$ $\frac{\text{حا } ٣س}{\text{ظا } ٢س}$ = ...

(٢) الدالة د حيث د(س) = $\frac{س + ٢}{س - ١}$ غير متصلة عند س = ١ لأن

(٣) فى أى مثلث أ ب جـ يكون $\frac{أ}{\text{حا } أ}$ = $أ - ب$

(٤) فى $\triangle$س ص ع المقدار $\frac{س^{٢} + ص^{٢} - ع^{٢}}{٢ س ص}$ يساوى

السؤال الثانى: **اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه.**

(١) $\lim_{س \to \infty}$ $\frac{س^{٣} + ٥}{س(٢س^{٢} + ٣)}$ =

أ $\frac{٥}{٨}$ ب ١ ج $\frac{١}{٢}$ د $\frac{٥}{٣}$

(٢) فى $\triangle$أ ب جـ إذا كان ٤ حا أ = ٣ حا ب = ٦ حا جـ فإن ق(∠جـ) =

أ ٨٩° ب ٢٩° ج ٥٧° د ٨٢°

(٣) إذا كانت د دالة متصلة حيث د(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - ١}{س - ١} & \text{عندما س} \neq ١ \\ ٢أ & \text{عندما س} = ١ \end{cases}$ فإن قيمة أ تساوى

أ صفر ب -٢ ج ٢ د ١

(٤) إذا كان د(س) = ٥ فإن $\lim_{س \to ١}$ د(٢س) =

أ ٥ ب ١٠ ج ٢,٥ د ٧

السؤال الثالث:

(١) أوجد $\lim_{س \to ٣}$ $\frac{\sqrt{٢س + ٣} - ٣}{س^{٢} - ٩}$

(٢) أ ب جـ مثلث فيه $أ$ = ٥سم، ب$ج$ = ٧سم ، ق(∠أ) = ٤٠° أوجد ق(∠ب).

السؤال الرابع:

(١) أوجد $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٢} + ٣س - ١٠}$

(٢) حل المثلث ∆ أ ب جـ الحاد الزوايا الذى فيه أَ = ٢١سم ، بَ = ٢٥سم وطول قطر الدائرة المارة برؤوسة ٢٨سم.

السؤال الخامس:

(١) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{س + ٣} & س \neq ٣ \\ س + أ & س = ٣ \end{cases}$ متصلة عند س = ٣ فأوجد قيمة أ.

(٢) أ ب جـ ء متوازى الأضلاع فيه ق(∠أ) = ٥٠° ، ق(∠ء ب جـ) = ٧٠° ، ب ء = ٨سم أوجد محيط متوازى الأضلاع.

الاختبار الثانى

اجب أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أكمل مايأتى:

(١) $\lim_{س \to ١}$ (٢س^{٢} + ٣س) = ...

(٢) أ ب جـ مثلث فيه أَ = ٧سم ، بَ = ٨سم ، جَ = ٥سم فإن ق (∠أ)

(٣) $\lim_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ}$ = ...

(٤) فى المثلث أ ب جـ يكون $\frac{أ}{حا أ}$ = ... = ق حيث ق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس ∆ أ ب جـ

السؤال الثانى: اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه.

(١) $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س + حا ٣س}{ظا ٥س}$ =

أ) ٥ ب) $\frac{٦}{٥}$ جـ) ١ د) صفر

(٢) فى أ ب جـ إذا كان أَ = ٦، ق(∠ب) = ٢ ق(∠أ) = ٨٠° فإن جَ =

أ) $\frac{٦ حا ٤٠°}{حا ٦٠°}$ ب) $\frac{٦ حا ٦٠°}{حا ٤٠°}$ جـ) $\frac{حا ٤٠°}{٦ حا ٦٠°}$ د) $\frac{٦ حا ٦٠°}{حا ٤٠°}$

③ إذا كان $\lim_{س \to ١}$ د(س) لها وجود حيث د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ & س < ١ \\ ٣س + أ & س > ١ \end{cases}$ فإن أ =

أ ١ ب ٢ جـ ٣ د ٤

④ فى المثلث س ص ع إذا كان: $\frac{حا س}{٢} = \frac{حا ص}{٤} = \frac{حا ع}{٥}$ فإن قياس أكبر زاوية فى المثلث:

أ ٦٠° ب ٧٥° جـ ٩٠° د ١٢٠°

السؤال الثالث:

① أوجد $\lim_{س \to ٣}$ د(س) إذا كان د(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - ٧س + ١٢}{س - ٣} & س < ٣ \\ ٢س - ٧ & س > ٣ \end{cases}$

② أ ب جـ مثلث فيه ق(∠أ) : ق(∠ب) : ق(∠جـ) = ٣ : ٤ : ٣ فإذا كان أَ = ٥سم فأوجد محيط المثلث.

السؤال الرابع:

① أوجد:

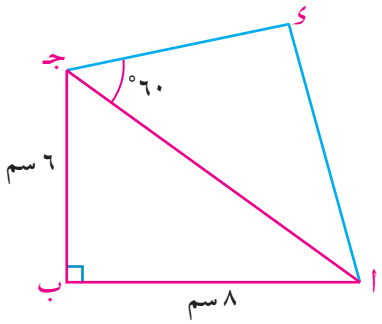
أ أولًا: $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٩}$

ب ثانيًا: $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٢} + حا ٣س}{س^{٢} + س}$

② فى الشكل المقابل: أ ب جـ ء شكل رباعى فيه

أ ب = ٨سم، ب جـ = ٦سم، ق(∠ب) = ٩٠°، ء جـ = ٥ سم،

ق(∠أ جـ ء) = ٦٠°. أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوس أ ء جـ



السؤال الخامس:

① ابحث اتصال الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} + س - ٢}{س + ٢} & س < -٢ \\ ٣س + ٥ & س \geq -٢ \end{cases}$

② حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أَ = ٥سم ، بَ = ٢جـَ = ٨سم.

الاختبار الثالث

اجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أكمل مايأتى:

① $\lim_{س \to \infty} (\frac{١}{س} + \frac{٣س^{٢} - ١}{س^{٢}})$ = ...

② مساحة سطح الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ الذى فيه أ/ = ٧٫٣سم، ق(∠أ) = ١٢٠° تساوى

اختبارات عامة

(٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{\text{حا}^{٢} ٣س + س^{٢}}{\text{ظا } س^{٢}}$ = ...

(٤) أ ب جـ مثلث فيه بَ = ١٥ سم ، جـَ = ٧ سم ، ق (∠أ) = ٦٠° فإن أَ = ...

السؤال الثانى: اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه.

(١) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٧} - ١}{س - ١}$ = ...

أ) ٧ ب) ٨ جـ) ٦ د) صفر

(٢) فى أ ب جـ يكون $\frac{\text{أَ}}{\text{أَ} + \text{بَ}}$ = $\frac{\text{حا أ}}{.....}$

(٣) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} \frac{\text{حا أ س}}{س} & س \neq ٠ \\ ٣ & \text{عندما س = صفر} \end{cases}$ فإن أ =

أ) ١ ب) ٢ جـ) ٣ د) ٤

(٤) فى المثلث س ص ع إذا كان سَ = صَ فإن حتا س =

أ) $\frac{٢ص}{ع}$ ب) $\frac{٢ع^{٢}}{ص}$ جـ) $\frac{ع}{٢س}$ د) $\frac{ص}{٢س}$

السؤال الثالث:

(١) أوجد قيمة: $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٨س + ٤} - ٢}{س^{٢} + س}$

(٢) أ ب جـ مثلث فيه ق(∠أ) = ٣٥ ، أَ = ٨سم ، بَ = ٦سم أوجد ق(∠ب).

السؤال الرابع:

(١) ابحث اتصال الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٣ & س \leq ١ \\ \frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{س - ١} & س > ١ \end{cases}$ عند س = ١

(٢) شكل خماسى منتظم محيط ٣٠سم. أوجد مساحة سطحة.

السؤال الخامس:

(١) أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} أس^{٢} + ٣ & س \geq ١ \\ ٢أ + س & س < ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١

(٢) أ ب جـ ء متوازى الأضلاع محيطة ٢٠سم فإذا كانت النسبة بين طولى ضلعين متجاورين ٢ : ٣ فإذا كان ب ء = ٨سم فأوجد طول $\overline{\text{أ جـ}}$.

الاختبار الرابع

اجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أكمل مايأتى:

(١) $\lim_{س \to \infty} \frac{س(س^{٢}+٣)}{(س+١)^{٣}}$ = ...

(٢) مساحة سطح الدائره التى تمر برؤوس مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه = ٦سم تساوى

(٣) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} |س-٢| & س \leq ٢ \\ أ+٣ & س > ٢ \end{cases}$ متصلة عند س = ٢ فإن أ = ...

(٤) محيط المثلث أ ب جـ الذى فيه أ/ = ب/ = ٦سم، ق(∠جـ) = ٨٠° يساوى

السؤال الثانى: **اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه.**

(١) $\lim_{س \to ا} \frac{س^{ن}-ا^{ن}}{س^{م}-ا^{م}}$ =

أ $\frac{م}{ن}$ ب $\frac{م}{ن}(ا)^{م-ن}$ ج $\frac{ن}{م}(ا)^{م-ن}$ د $\frac{ن}{م}(ا)^{ن-ا}$

(٢) فى أي مثلث أ ب جـ يكون: $\frac{حا(ا+ب)}{حاا+حاب}$ = ...

أ ١ ب $\frac{جَ}{اَ+بَ}$ ج $\frac{اَ}{بَ+جَ}$ د $\frac{بَ}{اَ+جَ}$

(٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{٥+س^{-٢}}{٣س^{-٢}+١}$ =

أ $\frac{٥}{٤}$ ب $\frac{٥}{٣}$ ج ٥ د $\frac{١}{٣}$

(٤) قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٦سم، ١٠سم، ١٤سم تساوى

أ ١٢٠° ب ١٥٠° ج ١٣٥° د ٦٠°

السؤال الثالث:

(١) ابحث وجود نهاية للدالة د عندما س ⟵ ٠ حيث د(س) = $\begin{cases} \frac{ظا٢س}{حاس} & لكل\ س < ٠ \\ \frac{٥س+٦}{س+٣} & لكل\ س > ٠ \end{cases}$

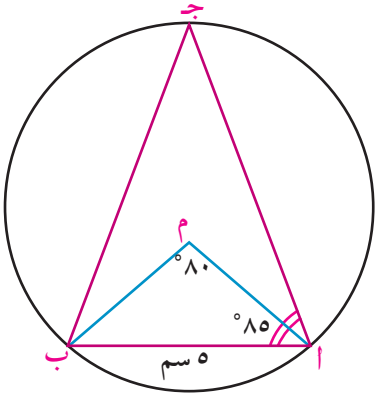
(٢) حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أَ = ٥سم، بَ = ٧سم، ق(∠جـ) = ٦٥°.

السؤال الرابع:

① أوجد قيمة م التى تجعل الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س^{٣} - ٨} & س \neq ٢ \\ \frac{-٢}{|م|} & \text{عندما } س = ٢ \end{cases}$

متصلة عند س = ٢

② فى الشكل المقابل: م دائرة، أ ب = ٥سم، ق(∠ أ م ب) = ٨٠°،
ق(∠ جـ أ ب) = ٨٥° أوجد:



أ **أولًا:** محيط △ أ ب جـ

ب **ثانيًا:** مساحة سطح الدائرة م

السؤال الخامس:

① أوجد $\lim_{س \to -٢} \frac{(س + ٣)^{°} - ١}{س + ٢}$

② أ ب جـ مثلث فيه أ = ٧سم ، ب = ٩سم ، ق(∠ أ) = ٨٠° أوجد ق(∠ جـ).

الاختبار الخامس

اجب أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أكمل مايأتى:

① $\lim_{س \to ٠}$ (٣س + ٢) = ...

② أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه = ١٠سم، مساحة سطح الدائرة المارة برؤوسة تساوى

③ إذا كان د دالة متصلة عند س = صفر حيث د(س) = $\begin{cases} \frac{حا أ س}{س} & س \neq \text{صفر} \\ س + ٣ & \text{عندما } س = \text{صفر} \end{cases}$ فإن أ = ...

④ فى △ س ص ع الذى أطوال أضلاعه سَ ، صَ ، عَ المقدار: $\frac{س^{٢} + ص^{٢} - ع^{٢}}{٢ س ص}$ يساوى

السؤال الثانى: **اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه.**

① $\lim_{س \to ٣}$ $\frac{س - ٣}{س^{٢} - ٩}$ =

أ ٣ ب $\frac{١}{٩}$ ج $\frac{١}{٣}$ د $\frac{١}{٦}$

(٢) فى Δ أ ب جـ يكون حتا (أ + ب) =

أ $\frac{أ^{٢} + ب^{٢} - جـ^{٢}}{٢ أ ب}$ ب $\frac{أ^{٢} + جـ^{٢} - ب^{٢}}{٢ أ ب}$ ج $\frac{ب^{٢} + جـ^{٢} - أ^{٢}}{٢ ب جـ}$ د $\frac{جـ^{٢} - أ^{٢} - ب^{٢}}{٢ أ ب}$

(٣) أ ب جـ مثلث فيه $\frac{\text{حا أ}}{٣} = \frac{\text{٢ حا ب}}{٥} = \frac{\text{حا جـ}}{٤}$ فإن أ : ب : جـ =

أ ٦ : ٥ : ٨ ب ٦ : ٥ : ٨ ج ٤ : ٢ : ٧ د ٦ : ٥ : ٣

(٤) $\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{\sqrt{٣ + س^{٢}}}{١ + ٢س} =$

أ ١ ب $\frac{٣}{٢}$ ج $\frac{١}{٢}$ د ٣

السؤال الثالث:

(١) أوجد $\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{س^{٢} + ٧س + ١٢}{س^{٢} + ٩}$

(٢) أ ب جـ فيه $\frac{١}{٣}$ حا أ = $\frac{١}{٤}$ حا ب = $\frac{١}{٥}$ حا جـ أوجد و(∠ جـ) وإذا كان محيط المثلث = ٢٤ سم أوجد مساحته.

السؤال الرابع:

(١) أوجد: $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{س^{٢} + \text{حا ٣س}}{٥س \text{ حتا ٢س}}$

(٢) حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أ = ٩سم ، ب = ١٥سم ، و(∠ جـ) = ١٠٦°

السؤال الخامس:

(١) أوجد $\text{نهـا}_{س \to -٢} \frac{(س + ٣)^{°} - ١}{س^{٢} - ٤}$

(٢) أ ب جـ ء شكل رباعى فيه أ ب = ٢٧سم، ب جـ = ١٢سم، جـ ء = ٨سم، ء أ = ١٢سم، أ جـ = ١٨سم. أثبت أن $\overline{أ جـ}$ ينصف ∠ ب أ ء ثم أوجد مساحة الشكل أ ب جـ ء.

إجابات بعض التمارين

الوحدة الأولى: الدوال الحقيقية

اجابة بعض تمارين الدرس الأول

(١) د (٢) د (٣) ب (٤) جـ

(٥) أ ع - {٢، ٣} ب ع - {-١}

جـ س ⩽ ٢ د [-٢، ٢]

(٦)]١، ٣] ∪ {-١} (٨) [-٣، ٣]

(٩)]١، ١٠[

(١٣) أ ٨٠ ب ٨٠ جـ ٤٠

اجابة بعض تمارين الدرس الثاني

(٢) شكل (١) {-٢، ٢} ليست.

شكل (٢) ع - [-٢، ٢] فردية

شكل (٣)]-∞، ٣] زوجية.

شكل (٤) [٠، ٤] زوجية.

(٣) أ زوجية ب فردية د ليست

هـ ليست و فردية ز زوجية

(٤) أ {-٢، ٢} ب]-∞، ٠[

(٥) شكل (٢) [-٢، ٢] - {٠}

شكل (٤) ح - {٠}

اجابة بعض تمارين الدرس الثالث

(١) شكل (١) ح - [-٢، ٢]. شكل (٣)]-∞، ٠[

شكل (٤) ح -]٠، ٢]

(٣) ٥

اجابة بعض تمارين الدرس الرابع

(١) أ د(س) = $\frac{١}{٢}$ س + ٣

ب د(س) = $\frac{٥}{٣}$ س - $\frac{١}{٣}$ س

(٣) ٤ وحدة مساحة (٤) ٦ وحدة مساحة

(٥) أ (-١، ٠)، (٥، ٠) ب (٢، ٣)

جـ ٤ وحدة مساحة

(٩) أ (٣، ٠)، [٠، ∞[ب (-١، ٠)، [٠، ∞[

جـ (٠، -٤)، [-٤، ∞[د (٠، ١)، [١، ∞[

(١١) ح -]-١، ١] ، ليست زوجية وليست فردية

اجابة بعض تمارين الدرس الخامس

(١) $\frac{١}{٢}$ (٢) ϕ (٣) {٢}

(٤) {-١، ٥} (٥) {-٢، ٥} (١٢) {٤}

(٢٦) ح - [١، ٤] (٢٨) [-٥، ٢] (٣٠) [-٦، ٩]

(٣١)]$\frac{-٢}{٣}$، ٢[(٣٢) ح -]$\frac{٥}{٣}$، ٣[

(٣٣) ϕ (٣٧) [$\frac{٧}{٣}$، $\frac{٨}{٣}$] - {$\frac{٥}{٢}$}

(٤٠)]-∞، ٢[∪]٦، ∞[

الوحدة الثانية: الاسس واللوغاريتمات

اجابة بعض تمارين الدرس الأول

(١) ١

(٤) أ ٤ ب $\frac{١}{٢}$ جـ ١٦

د $\sqrt[٤]{س^{٥}}$ هـ ٢ و {٠، ٤}

(٦) ١ (٨) ٣٦ أو -١٨

نشاط

أ ١٠,٨١٤٣

اجابة بعض تمارين الدرس الثانى

(١) أ ع$^{+}$ ∋ - {١} ب ٣، س - ١

جـ اساسها اقل من الصفر

(٢) أ أ < ١ ب ٠ = أ = ١

جـ الاتجاه السالب لمحور السينات

إجابات بعض التمارين

(٣) ب اسية أسها س واساسها ٥
هـ اسية اسها (س - ١) واساسها $\frac{٢}{٣}$

(٥) ٢١٧١٢٦,٥ (٦) ٣٥٤٢٩
(٧) ١٥٥ بقرة
(٩) ص = ٣٦٤٠٠٠ (١ - ٠,٠٤)$^{ن-١}$، ص = ٢٥٢٠٨

(١١) نشاط

أ ١٢٠ الف جنية ب ١٠٪

اجابة بعض تمارين الدرس الثالث

(١) أ ١ ب ١ هـ ٢
(٢) أ {١} ب {-١} جـ ٢
د {-٣} هـ {٢، -٢} و {٢}
ز {٢، ٠} ح {٣، ٢} ط {-٧}
(٤) س = ٢ (٥) ر = ١
(٨) أ ٢٠٤٦ ب ١٦

اجابة بعض تمارين الدرس الرابع

(١) {(٤، ١)، (-٣، ٢)، (١، ٣)، (٠، ٤)}
ب ١ جـ (١، ٢) د ٢
(٢) أ (✗) ب (✓) جـ (✗)
د (✗)
(٣) أ د$^{-١}$(ر) = ٢س - ٨ ب د$^{-١}$(ر) = $\frac{س}{٤}$
جـ د$^{-١}$(ر) = $\frac{٤}{ر - ٥}$ د د$^{-١}$(س) = $\frac{٣}{ر}$
(٤) أ د$^{-١}$(ر) = $\frac{س}{٥}$ ب ١١
(٨) ب، د

اجابة بعض تمارين الدرس الخامس

(٣) أ]-$\frac{١}{٣}$، ∞[ب]٠، ∞[
(٤) أ ٤ ب ٢ جـ صفر
(٥) أ {١} ب {٣} جـ {صفر}
د {٩} هـ {٩} و {١}
(٨) أ ٩ ب {٢} جـ ٣
د]-∞، ٠[∪]٠، ١[هـ ٢
و ٢ ز ص = لو$_{٣}$ (٣ - س)

نشاط

أ ٠,٨٧ ب ١,٣٩ جـ ٢

اجابة بعض تمارين الدرس السادس

(١) أ ٣ ب ٥ جـ -٢
د ٢ هـ -٣ و $\frac{١}{٣}$
ز صفر ح ٤ ط $\frac{١}{٢}$
(٢) أ ١ ب ١ جـ ٢
د ١ هـ صفر و صفر
ز ١ ح ٢
(٥) أ ٠,٩٤ ب ٤,٨٩ جـ -٠,٠٧
د ٠,٥٦
(٦) أ {٤} ب {٣} جـ {٢}
د {١٠٠٠ ، ٠,١} هـ {١٠٠٠ ، ٠,١}
و {٢} ز {٣، $\frac{١}{٢}$} ح {٢}
(٥) ٢٩
(١٠) أ ص = أ$_{٠}$ (١,٠٧)ن ب ١٠ سنوات تقريبًا.

اجابة بعض التمارين عامة

(١) أ لو$_{٢٥}$ ب (د) جـ ٨
د أ ز ٢٠ ح -٢
ط ٢
(٢) أ {-١} ب {٤} جـ {٢}
د {٨، -٨} هـ {١٠، ٠,١}
و {١٦} ز {$\frac{١}{٢}$} ح {-$\frac{١٧}{٩}$}

إجابات بعض التمارين

(٦) أ ٦ ب ٤

اجابة اختبار تراكمى

(١) أ $-\frac{٨}{١}$ ب $\frac{١}{٢}$

(٢) أ ١٠ ب $\frac{١٨}{٢٥}$ ج ٢

(٤) أ ٧ ب ٨٩ ج صفر

(٧) ١٠٠٠

الوحدة الثالثة: النهايات والاتصال

اجابة بعض تمارين الدرس الأول

(١) أ ١ ب ١

(٢) ليس لها وجود.

(٥) أ -٤ ب غير معينة

(١١) ليس لها وجود

(١٢) ٢ (٥) -٦

اجابة بعض تمارين الدرس الثانى

(١) ٥ (٢) -١٠ (٣) -١٠

(٤) ٤ (٥) ٤٫٥ (٨) $\frac{٤}{٣}$

(٩) ٣ (١١) ليس لها نهاية

(١٣) ٢ (٢١) $\frac{٧}{٦}$ (٢٤) ٣

(٢٥) -٣ (٢٧) $\frac{-١}{٥}$ (٢٩) $\frac{٥}{٣}$

(٣١) $\frac{١}{٤}$ (٣٢) $\frac{١}{٣}$ (٣٣) $\frac{-١}{٣}$

(٤٦) ١٨ (٤٧) $\frac{٤}{٥}$ (٤٨) $\frac{١}{٨٠}$

حل تفكير ابداعى

(٥٠) ٥

(٥١) أ ٤ ب -٢

اجابة بعض تمارين الدرس الثالث

(١) ١ (٢) -٢ (٣) -٧

(٤) ∞ (٥) ٢ (١١) ٣

(١٢) ١ (١٣) ٠ (١٤) ∞

(١٥) $\frac{١}{٢}$ (٢١) $\frac{-٣}{٢}$ (٢٢) ٠

(٢٣) ∞ (٢٤) ٠ (٢٥) ٢

(٣٣) $\frac{-٢}{٣}$ (٣٧) أ = ٤، ب = ٤

حل تفكير ابداعى

(١) أ ١ جنية ب ٥٥ قرش

اجابة بعض تمارين الدرس الرابع

(١) ١ (٢) ٠ (٣) ٠

(٤) ٧ (٥) $\frac{٣}{٤}$ (١١) $\frac{٢}{٣}$

(١٢) $\frac{٣}{٢}$ (١٣) $\frac{٤}{٣}$ (١٤) $\frac{٣}{٤}$

(١٥) ٣ (٢١) $\frac{١}{٥}$ (٢٢) ١

(٢٣) ٢ (٢٤) ٠ (٢٥) ٠

(٤١) ١٧ (٤٢) $\frac{١}{٥}$ (٤٣) $\frac{-٩}{٨}$

(٤٤) ٠ (٤٥) ٢٨ (٤٦) $\frac{١}{٤}$

(٤٧) $\frac{-٩}{٥٠}$ (٤٨) $\frac{١}{٥}$ (٤٩) ١

اجابة بعض تمارين الدرس الخامس

(١) أ ١ ب ١

(٢) أ ∞ ب ∞

(٣) أ -٢ ب -٣ ج $\frac{١٨}{٢٥}$

د ليس لها وجود هـ ليس لها وجود

(٦) أ ٠ ب $-\infty$

(٧) ٤ (٨) ١٠ (٩) ليس لها وجود

(١٤) ٢ (١٥) ١ (١٨) ليس لها وجود

اجابة بعض تمارين الدرس السادس

(١) متصلة (٢) متصلة (٣) غير متصلة

(٤) غير متصلة، متصلة (٥) متصلة (٦) متصلة

(٧) متصلة على ع (٨) متصلة على ع

(١٧) متصلة على ع - {٣، -٣}

اجابة بعض التمارين عامة

(١) ٦ (٣) ٣ (٦) ١

(٧) $\frac{١}{٣}$ (١٥) -٣ (١٧) $\frac{٢٥}{٢}$

(٣٠) ٨ (٣٢) -٢ (٣٣) ليس لها وجود

(٣٦) متصلة (٣٨) لا يمكن

(٣٩) -٢ (٤٠) متصلة على الفترة]٠، ∞[

اجابة اختبار تراكمى

(١) ٣، -٢ (٢) -٣س (٣) س٢ - س + ٤

(٤) $\frac{-١}{\pi}$ (٧) $\frac{-٣}{٢}$ (٨) $\frac{٢}{٥}$

(٩) $\frac{-١}{٣}$ (١٠) $\frac{١}{٢}$ (١٢) $\frac{-٩}{٥}$

(١٥) ليس لها وجود (١٦) ليس لها وجود

(٢٠) أ = ٢ (٢٣) ∞ (٢٦) $\frac{-٣}{٢}$

(٣٠) ك = ٤، م = $\frac{١}{٢}$

(٣١) أ متصلة على]٢، ∞[

ب متصلة على ع - {٢، -٢}

الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

اجابة بعض تمارين الدرس الأول

(١) أ الزوايا ب ٦ : ٤ : ٣

(٢) أ ١٠سم ب ٤سم ج أ

د ٢نق هـ ١٤سم و ٦ : ٤ : ٣

(٨) ≃ ٢٨,٢٨سم، ≃ ٢٣,٧٣سم

(٩) ≃ ٧,٣سم، ≃ ٤,٨٢سم

(١٠) ≃ ١٤,٦١سم، ≃ ١٦,٥٨سم

(١٣) ≃ ٣٢سم (١٧) ≃ ١٨,٠٤سم، ≃ ١٦,٥٦سم

اجابة بعض تمارين الدرس الثاني

(١٠) ج ٦٠ د ١٢٠ هـ ٢٨٣°

و ٧٨٢٨° ز ١١,٤٩سم

ح ١٧,٧١سم

(١١) أ و(∠أ) = ٧٦,٨٢°

و(∠ب) = ٤٣,٢٥°

و(∠جـ) = ٥٩,٩٣°

ج و(∠أ) = ٥٢,١٦°

و(∠ب) = ٩٩,١٨°

و(∠جـ) = ٢٨,٦٦°

(١٢) أ أ = ٩,٨٣، و(∠ب) = ٩٩,١٨°،

و(∠جـ) = ٥٧,٦٧°

ب و(∠أ) = ٢٤,٥٦°، و(∠ب) = ٩٩,٢٢°،

و(∠جـ ب) = ٥٦,٢٣°

(١٢) أ جـ = ١٦,٥١سم (١٥) ب ء = ١٠سم

(١٧) ٢,٩سم (١٥) أ ب ≃ ١٥,٩٥متر

اجابة بعض التمارين عامة

(١٣) ٣٨سم٢ (١٦) ١٢٠ (١٩) ٣٨ ٣٩′ ٣٧°

(٢٧) ٢٥سم (٢٨) ١١٢سم ، ١٤٤سم

(٣٠) ١٦سم

اجابة اختبار تراكمى

(١) ب (٢) د (٣) أ

(٤) جـ

اختبارات عامة

أولا : اختبارات الجبر

الاختبار الاول

إجابات بعض التمارين

السؤال الأول:

(١) [-٢، ٢] (٢) محور السينات.

(٤)]٠، ∞[.

السؤال الثاني:

(١) د (٢) جـ (٣) أ

السؤال الثالث:

(١) ب ع - {١، -١}

السؤال الخامس:

(١) {٤} (٢) $\{\frac{١}{٢}\}$.

الاختبار الثاني

السؤال الأول:

(١) -أ (٢) ±٣.

(٤) أ < ١، ٠ < أ < ١

السؤال الثاني:

(٢) د

السؤال الرابع:

(١) أ أ- ص = ١ - س

السؤال الخامس:

(١) أ فردية ب ليست زوجية وليست فردية

جـ ليست زوجية وليست فردية.

الاختبار الثالث

السؤال الثاني:

(١) جـ (٢) ب (٣) أ

السؤال الثالث:

(١) ٢,٨، ٠,٣٦ (٢) {-٤، ٧}

السؤال الرابع:

(١) ١ (٢) س = ٤

السؤال الخامس:

(١) ٢ (٢) ع

الاختبار الرابع

السؤال الأول:

(١)]-∞، -٢[∪ {٢} (٢) (٠، ٢).

السؤال الثاني:

(٢) جـ (٣) أ

السؤال الثالث:

(١) ٤

السؤال الرابع:

(١) أ = ٢ (٢) {١، ٧}

الاختبار الخامس

السؤال الأول:

(٢) جـ (٣) د (٤) د

السؤال الثالث:

(١) المجال ع - {-١} المدى ع - {-٢}

(٢) س = ١، ص = ٢

السؤال الرابع:

(١)]١، ∞[زوجية. (٢) {$\frac{1}{2}$، ٤}

ثانيا : اختبارات التفاضل وحساب المثلثات

الاختبار الأول

السؤال الأول:

(١) $\frac{3}{2}$ (٢) حا أ - حاب

السؤال الثاني:

(١) جـ (٢) ب (٣) د

(٤) ١٠

السؤال الرابع:

(١) $\frac{81}{7}$

السؤال الخامس:

(١) -١

الاختبار الثانى

السؤال الأول:

(١) -١ (٢) ١ : ٢ : $\sqrt{3}$

(٣) ن أ$^{ن-1}$ (٤) ٦

السؤال الثاني:

(١) جـ (٢) ب (٣) أ

(٤) جـ

السؤال الثالث:

(١) -١

السؤال الرابع:

(١٠) ٣ (٣) ٥

الاختبار الثالث

السؤال الأول:

(١) $\frac{3}{2}$ (٢) حا أ - حاب

السؤال الثاني:

(١) أ (٣) ٣ (٤) جـ

السؤال الثالث:

(١) $\frac{1}{4}$

الاختبار الرابع

السؤال الأول:

(١) ١ (٣) -٣

السؤال الثاني:

(١) ب (٤) أ

السؤال الخامس:

(١) ٥

الاختبار الخامس

السؤال الأول:

(١) ٢

السؤال الثاني:

(٢) د (٣) أ (٤) جـ

السؤال الثالث:

(١) ١

السؤال الرابع:

(١) $\frac{3}{5}$